Kapitel 1

Mathematische Grundbegriffe

- Mengen
- Zahlen
- Kombinatorik
- Anwendungen

Mengen, Elemente einer Menge

Nach dem Begründer der Mengenlehre, Georg Cantor, gilt ganz abstrakt:

Definition

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen.

Beispiel

$$\begin{aligned} A &= \{1,2\} = \{2,1\} \\ &\quad \text{„aufzählende Form"} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x \leq 2\} \\ &\quad \text{„beschreibende Form"} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} \\ &\quad \text{Lösungsmenge von Gleichung} \end{aligned}$$

$1 \in A = \{1,2\}$ *(„1 ist Element von A"),*
aber $3 \notin A$, $a \notin A$

Leere Menge

Definition

Eine Menge heißt leer, wenn sie kein Element enthält. Man schreibt dann: $\emptyset$ oder auch $\{\ \}$.

Es gibt nur eine einzige, nämlich *die* leere Menge, da sich alle „leeren Mengen“ aufgrund der Eigenschaft, kein Element zu enthalten, nicht voneinander unterscheiden.

Teilmenge

Definition

Eine Menge A heißt genau dann Teilmenge einer Menge B, geschrieben: $A \subseteq B$, wenn aus $x \in A$ auch $x \in B$ folgt.

Zwei Mengen A und B sind genau dann „gleich“, wenn sie die gleichen Elemente enthalten oder — mit Hilfe der Teilmengenbeziehung ausgedrückt — wenn Folgendes gilt: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Insbesondere gilt also auch für jede Menge: $A \subseteq A$, d.h. jede Menge ist Teilmenge von sich selbst.

Aber auch $\emptyset \subseteq A$, also die leere Menge ist Teilmenge jeder beliebigen Menge.

Potenzmenge

Wir gehen von einer Grundmenge G aus:

Definition

Die Menge aller Teilmengen einer Menge G wird die Potenzmenge $\mathcal{P}(G)$ von G genannt.

Die Potenzmenge von G enthält stets die Menge G selbst und die leere Menge $\emptyset$ *als Element*.

Beispiel

Für $G = \emptyset$ *ist die Potenzmenge:* $\mathcal{P}(G) =\{ \ \emptyset \ \}$*; dies ist keineswegs die leere Menge, sondern diejenige Menge, welche ein einziges Element, nämlich die leere Menge selbst enthält!*

Die Potenzmenge der ein-elementigen Menge $G = \{a\}$ *ist* $\mathcal{P}(G) = \{ \ \emptyset, \{a\} \ \}$*; sie besteht aus den beiden Mengen* $\emptyset$ *und* $\{a\}$*.*

Und für $G = \{a, b\}$ *lautet die Potenzmenge:* $\mathcal{P}(G) = \{ \ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \ \}$*; die Potenzmenge besteht in diesem Fall aus 4 Elementen, die wiederum allesamt Mengen sind.*

Übung

Wie lautet die Potenzmenge der Menge $G = \{1, 2, 3\}$ *und wie viele Elemente enthält sie?*

Lösung

$\mathcal{P}(G) \;\; =\{ \;\; \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \; \}$ *enthält 8 Elemente.*

Anzahl der Elemente der Potenzmenge

Ist n die Anzahl der Elemente der endlichen Menge G, so hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(G)$ genau 2^n Elemente.

Oft spricht man anstelle von der Anzahl der Elemente einer (endlichen) Menge G auch von ihrer „Mächtigkeit“ und kürzt diese mit $|G|$ ab.

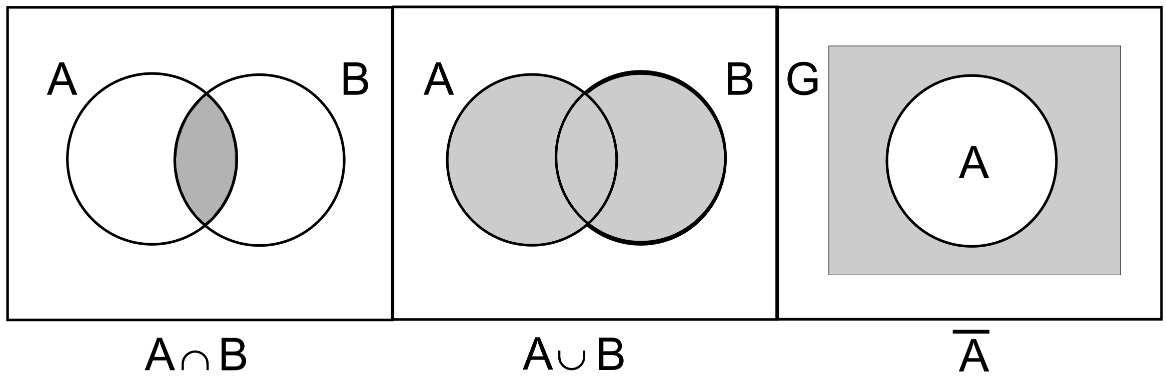
Die Aussage des obigen Satzes lässt sich damit kurz wie folgt aufschreiben:
Aus $|G| = n$ folgt $|\mathcal{P}(G)| = 2^n$.

Grundlegende Mengenoperationen

Es seien A, B, C Teilmengen einer Grundmenge G:

Definition

$\boldsymbol{A \cap B}$ **:=**	$\boldsymbol{\{x \in G \mid x \in A}$ **und** $\boldsymbol{x \in B\}}$ **(Durchschnitt)**
$\boldsymbol{A \cup B}$ **:=**	$\boldsymbol{\{x \in G \mid x \in A}$ **oder** $\boldsymbol{x \in B\}}$ **(Vereinigung)**
$\boldsymbol{\overline{A}}$ **:=**	$\boldsymbol{\{x \in G \mid x \notin A\}}$ **(Komplement)**



Grundlegende Mengenoperationen (Ergänzung)

Die *Differenz* $A \backslash B := \{x \in A \,|\, x \notin B\}$ ist eine Abkürzung für $A \backslash B = A \cap \overline{B}$ und insofern entbehrlich.

Im Falle $A \cap B = \emptyset$ nennt man A und B *disjunkt*.

Übung

Gegeben seien die Mengen $G = \{0, 1, 2, 3, ..., 8\}$, $A = \{1, 2, 4\}$ *und* $B = \{2, 7\}$. *Bestimmen Sie* $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{B}$, $B \backslash A$ *sowie eine Menge* C, *die zu* A *disjunkt ist, nicht aber zu* B.

Lösung

$A \cap B = \{2\}$, $A \cup B = \{1, 2, 4, 7\}$,
$\overline{B} = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $B \backslash A = \{7\}$
und etwa $C = \{0, 7\}$ *(Die Menge* C *muss die Zahl 7 enthalten, darf aber die Zahlen 1, 2 und 4 nicht enthalten.)*

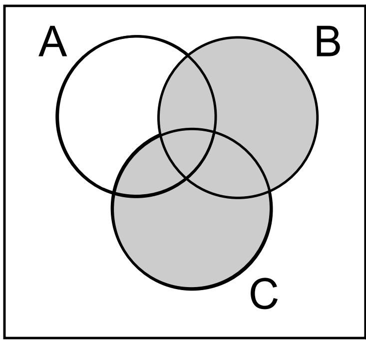
Rechenregeln

Es gelten folgende Rechenregeln:
Kommutativgesetz (K),
Assoziativgesetz (A),
Distributivgesetz (D).

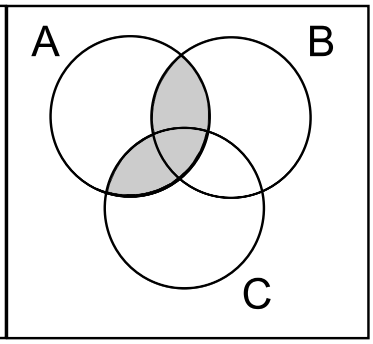
$$\begin{aligned}
A \cap B &= B \cap A, && \textbf{(K)}\\
A \cup B &= B \cup A, && \textbf{(K)}\\
A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C, && \textbf{(A)}\\
A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C, && \textbf{(A)}\\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), && \textbf{(D)}\\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) && \textbf{(D)}
\end{aligned}$$

Rechenregeln
(Veranschaulichung)

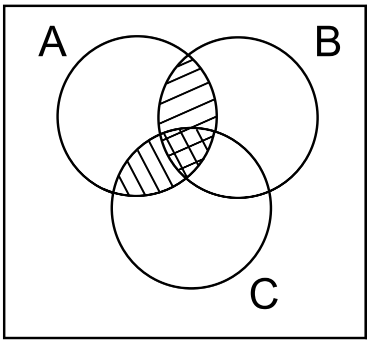
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



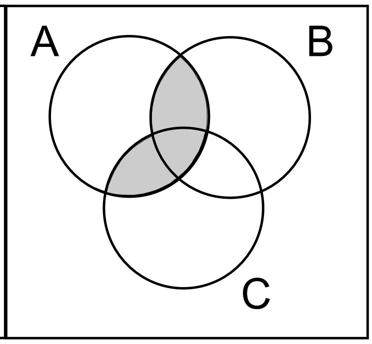
$B \cup C$



$A \cap (B \cup C)$



$A \cap B$ bzw. $A \cap C$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Weitere Rechenregeln

$$
\begin{aligned}
A \cap (A \cup B) &= A \\
A \cup (A \cap B) &= A \\[1em]
A \cap A &= A \\
A \cup A &= A \\[1em]
A \cap \emptyset &= \emptyset \\
A \cup G &= G \\[1em]
\overline{\emptyset} &= G \\
\overline{G} &= \emptyset \\[1em]
\overline{\overline{A}} &= A
\end{aligned}
$$

De Morgan’sche Regeln

Die folgenden Regeln sind unter der Bezeichnung De Morgan’sche Regeln bekannt:

$$\overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$$

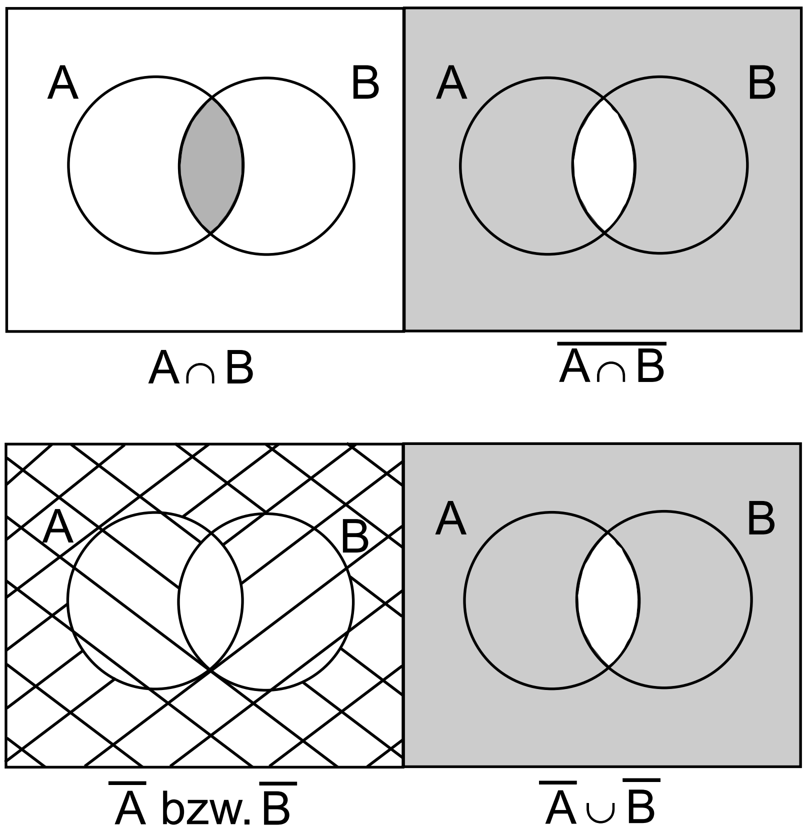
$$\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$$

Übung

Veranschaulichen Sie die erste der De Morgan'schen Regeln anhand von Venn-Diagrammen.

Lösung

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



Zahlen

Definition

Wir unterscheiden die folgenden Zahlenmengen:

- **Menge der natürlichen Zahlen:**
  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, ...\}$
  (Beachte: Nach DIN 5473 und ISO 31-11:1992 gehört die Null zu $\mathbb{N}$)
- **Menge der ganzen Zahlen:**
  $\mathbb{Z} := \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
- **Menge der rationalen Zahlen (oder der Brüche):**
  $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \middle| \; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{teilerfremd} \right\}$

Beispiel

$20 \in \mathbb{N}$, $-7 \in \mathbb{Z}$, $-3/5 = -0,6 \in \mathbb{Q}$ *aber auch* $20 = 20/1 \in \mathbb{Q}$*und* $-7 = -7/1 \in \mathbb{Q}$

Reelle Zahlen

Jede rationale Zahl lässt sich als endlicher oder periodischer Dezimalbruch darstellen. Andererseits gibt es Dezimalbrüche, die weder endlich noch periodisch sind. Solche Dezimalbrüche werden als *irrationale Zahlen* bezeichnet.

Beispiel

$-3/5 = -0,6 \in \mathbb{Q}$

$21/22 = 0,9545454... = 0,9\overline{54} \in \mathbb{Q}$

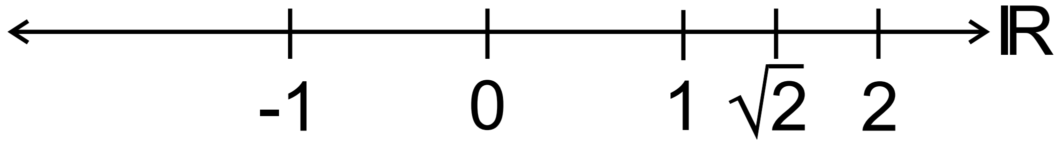
aber: $\sqrt{2} = 1,414213562... \notin \mathbb{Q}$

$\pi = 3,141592654... \notin \mathbb{Q}$

Reelle Zahlen

Definition

Die Gesamtheit aller rationalen und irrationalen Zahlen bezeichnet man als Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die Elemente dieser Menge kann man durch die Punkte der Zahlengeraden veranschaulichen.



Reelle Zahlen, Zahlbereichserweiterung

Offensichtlich gelten die folgenden Teilmengenbeziehungen:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Man kann auch sagen, dass durch *Zahlbereichserweiterung* immer umfassendere Zahlenmengen erhältlich sind.

Übung

Berechnen Sie Summe, Differenz, Produkt und Quotient der folgenden beiden Brüche: $\frac{3}{4}$ *und* $\frac{2}{3}$*.*

Lösung

$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}=\frac{17}{12}$,

$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{1}{12}$,

$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$,

$\frac{3}{4}:\frac{2}{3}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$.

Intervalle

Definition

Wir unterscheiden die folgenden Zahlenmengen:
offenes Intervall:
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \,|\, \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\}$$
abgeschlossenes Intervall:
$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \,|\, \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$$

Daneben gibt es noch halboffene Intervalle, etwa

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$$

und analog $[a, b)$, und speziell noch die unbeschränkten Intervalle wie

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}$$

oder $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x\}$ (und analog $(-\infty, b]$ bzw. (a, ∞)).

(Absolut-) Betrag

Definition

Unter dem (absoluten) Betrag einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ versteht man

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x, & \text{wenn } x < 0. \end{cases}$$

Beispiel

$|6| = 6$, $|-\frac{2}{3}| = -\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$, $|0| = 0$.

Die Größe $|a - b|$ gibt den Abstand der beiden Zahlen a und b auf der Zahlengeraden wieder, beispielsweise haben die Zahlen -3 und 5 den Abstand $|(-3) - 5| = |-8| = 8$.

Rechengesetze für den Betrag

$$|x| = |-x|$$

$|x| \geq 0; \quad |x| = 0$ **genau dann, wenn** $x = 0$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$|x+y| \leq |x|+|y|$ **(Dreiecksungleichung)**

Übung
Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $-3x \leq 15$.

Lösung
Die Ungleichung kann wie folgt umgeformt werden:

$$-3x \leq 15,$$

daher

$$x \geq \frac{15}{-3},$$

d.h.

$$x \geq -5$$

bzw. als Lösungsmenge $[-5, \infty)$.

Übung

Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $|x + 3| < 7$.

Lösung

Wir unterscheiden 2 Fälle:

Im **1. Fall** *ist $x + 3 \geq 0$, also $x \geq -3$. Man kann das Betragszeichen weglassen und erhält $x+3 < 7$ bzw. $x < 4$. Wir erhalten insgesamt im 1. Fall*

$$-3 \leq x < 4.$$

Im **2. Fall** *ergibt sich für $x + 3 < 0$ oder $x < -3$: $-(x + 3) < 7$ und damit $-10 < x$. Insgesamt erhalten wir im 2. Fall*

$$-10 < x < -3$$

Für die **Lösungsmenge der Ungleichung** *müssen wir nur noch die Lösungsmengen der beiden Fälle vereinigen und erhalten somit das Intervall $(-10, 4)$.*

Es gibt auch eine **anschauliche Interpretation** *des Ergebnisses: Es sind alle Zahlen, die von der Zahl -3 einen Abstand kleiner als 7 haben.*

Übung

Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{4-3x}{1-x} > 2$.

Lösung
Auch hier ist eine Fallunterscheidung hilfreich.

Im **1. Fall** *ist* $1 - x > 0$*, d.h.* $x < 1$*: Durch Multiplikation mit dem Nenner des Bruches ergibt sich*

$$4 - 3x > 2 \cdot (1 - x)$$

und schließlich $2 > x$*. Insgesamt erhält man hier als Lösungsmenge* $(-\infty, 1)$*.*

Im **2. Fall** *ist* $1 - x < 0$*, d.h.* $x > 1$*: Bei Multiplikation mit dem Nenner kehrt sich das Ungleichheitszeichen um, also*

$$4 - 3x < 2 \cdot (1 - x)$$

und schließlich $2 < x$*. Dies ergibt für den 2. Fall insgesamt die Lösungsmenge* $(2, \infty)$*.*

Beide Fälle zusammengefasst *ergeben die Lösungsmenge* $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$*.*

Übung

Ermitteln Sie die Lösungsmenge der quadratischen Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 &= 0, \\ -2x^2 - 8x - 8 &= 0, \\ x^2 + 4x + 13 &= 0. \end{aligned}$$

Lösung

Allgemein gilt für quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ die Lösungsformel $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$. Der Ausdruck unterhalb des Wurzelzeichens ist die so genannte Diskriminante — sie gibt Auskunft darüber, ob zwei, eine oder überhaupt keine Lösung vorliegen. (Sollte vor dem Term x^2 in der quadratischen Gleichung noch ein Koeffizient stehen, so kann man die gesamte Gleichung durch diesen Term teilen und dann obige Formel anwenden. Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung der folgenden Formel: Die Lösung der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ ist gegeben durch $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.)

Durch Einsetzen in die Formel erhält man für die 1. Gleichung die beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$, für die 2. Gleichung erhält man nur eine Lösung $x_1 = x_2 = -2$, für die 3. Gleichung erhält man gar keine (reelle) Lösung.

Fakultäten, Permutationen

Definition

Die Anzahl der Möglichkeiten, $n\,(n \in I\!N)$ verschiedene Elemente anzuordnen, beträgt

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

(Lies: n Fakultät.) Man spricht auch von der Anzahl der Permutationen (=Vertauschungen) von n verschiedenen Elementen. Wir setzen: $0! := 1$.

Übung

Wie viele Anordnungen der 3 Buchstaben a, b und c gibt es? Wie sehen diese aus?

Lösung

Es gibt $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ *Anordnungen oder Permutationen, nämlich* abc, acb, bac, bca, cab *und* cba.

Binomialkoeffizienten

Definition

Die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus n Elementen ($k, n \in \mathbb{N}$) ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen, beträgt

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \qquad 0 \leq k \leq n$$

(Lies: „k aus n“ oder „n über k“.) Dieser Ausdruck heißt auch Binomialkoeffizient.

Übung
Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 32 Spielkarten 8 Stück zu ziehen?

Lösung
Es gibt $\binom{32}{8} = \frac{32!}{24! \cdot 8!} = 10\,518\,300$ *Möglichkeiten.*

Übung

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus den 5 Buchstaben a, b, c, d und e genau 2 auszuwählen? Wie sehen diese aus?

Lösung

Es gibt $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$ *Möglichkeiten, nämlich* $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{a, e\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$, $\{c, d\}$, $\{c, e\}$ *und* $\{d, e\}$.

(Hier ist die Mengenschreibweise angemessen, da es nicht auf die Reihenfolge der Elemente ankommt.)

Das Pascal'sche Dreieck

Die Binomialkoeffizienten kann man sehr schön in einem Schema anordnen, dem so genannten „Pascal'schen Dreieck“:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \ldots & & & & & &
\end{array}
$$

Das Pascal'sche Dreieck

Das Pascal'sche Dreieck in Binomialkoeffizienten-Schreibweise lautet:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} \\
 & & & & & & \cdots & & & & & &
\end{array}
$$

Übung

Überprüfen Sie die 6. Zeile, d.h. die Binomialkoeffizienten $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$ etc. auf ihre Richtigkeit!

Lösung

$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} = 1,$

$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5,$

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10,$

$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10,$

$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5,$

$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} = 1.$

Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

Für die Binomialkoeffizienten gilt:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Bedeutung des Namens „Binomialkoeffizient“

Der Name „Binomialkoeffizient“ kommt nun daher, dass die Koeffizienten in den aus der Schulzeit bekannten Binomischen Formeln gerade diese Binomialkoeffizienten sind:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2,\\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\ (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \binom{2}{0}a^2+\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}b^2,\\ (a+b)^3 &= \binom{3}{0}a^3+\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}ab^2+\binom{3}{3}b^3,\\ (a+b)^4 &= \binom{4}{0}a^4+\binom{4}{1}a^3b+\binom{4}{2}a^2b^2\\ &\quad+\binom{4}{3}ab^3+\binom{4}{4}b^4.\end{aligned}$$

Der Binomische Satz

Es gilt der Binomische Satz:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 \\ &\quad + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots \\ &\quad + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n.\end{aligned}$$

Übung

Berechnen Sie mit Hilfe des Binomischen Satzes $(3x-2)^5$!

Lösung

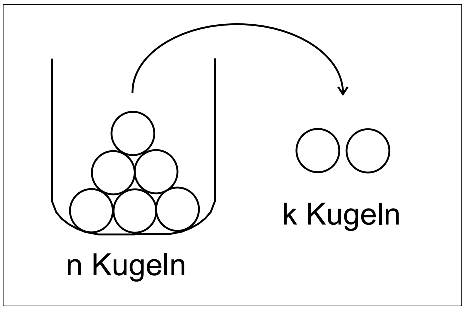
$$(3x-2)^5 = (\underbrace{(3x)}_{=:a} + \underbrace{(-2)}_{=:b})^5$$

$$\begin{aligned} = \; & \underbrace{\binom{5}{0}}_{=1}(3x)^5(-2)^0 + \underbrace{\binom{5}{1}}_{=5}(3x)^4(-2)^1 \\ & + \underbrace{\binom{5}{2}}_{=10}(3x)^3(-2)^2 + \underbrace{\binom{5}{3}}_{=10}(3x)^2(-2)^3 \\ & + \underbrace{\binom{5}{4}}_{=5}(3x)^1(-2)^4 + \underbrace{\binom{5}{5}}_{=1}(3x)^0(-2)^5 \end{aligned}$$

$$= 243x^5 - 810x^4 + 1080x^3 - 720x^2 + 240x - 32$$

Urnenmodell in der Kombinatorik

In der Kombinatorik ist das so genannte Urnenmodell weit verbreitet: Man stellt sich vor, dass aus einer Gesamtheit von n Kugeln in einer Urne eine „Stichprobe“ von k Kugeln entnommen werden soll.



Unterscheidung

— Stichprobe mit Zurücklegen (bzw. mit Wiederholung)
— Stichprobe ohne Zurücklegen (bzw. ohne Wiederholung)

— geordnete Stichprobe
— ungeordnete Stichprobe

Übung

a) *Wie ist Lottospielen im Urnenmodell zu charakterisieren?*

b) *Wie ist die Auswahl einer „Superzahl“ (zwischen* 0000000 *und* 9999999*) im Urnenmodell zu charakterisieren?*

Lösung

a) *Beim Lottospielen wird eine ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen entnommen.*

b) *Bei der Superzahl wird eine geordnete Stichprobe mit Zurücklegen entnommen.*

Wir können die Ergebnisse über die Entnahme einer Stichprobe von k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln zusammenfassen:

Stichprobe	geordnet	ungeordnet
mit Wiederholung	n^k	$\binom{n+k+1}{k}$
ohne Wiederholung	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Zahlen im Rechner: Oktalsystem

Theoretisch wäre auch als Basis unseres Zahlsystems etwa die 8 denkbar — wir dürften dann nur die Ziffern $\{0, 1, 2, \ldots, 7\}$ benutzen und würden das so genannte *Oktalsystem* verwenden.

Die Zahl 121577_8, also „121577“ im Oktalsystem, würde dann

$$\begin{array}{rlrlrlrlrlrlr} & 1\cdot & 8^5 & +2\cdot & 8^4 & +1\cdot & 8^3 & +5\cdot & 8^2 & +7\cdot & 8^1 & +7\cdot & 8^0 \\ = & 1\cdot & 32768 & +2\cdot & 4096 & +1\cdot & 512 & +5\cdot & 64 & +7\cdot & 8 & +7\cdot & 1 \\ = & 41855_{10}, \end{array}$$

also 41855 im gewohnten Dezimalsystem, bedeuten.

Zahlen im Rechner: Hexalsystem

Wir könnten z.B. auch eine Zahl größer als 10 als Basis eines Zahlsystems wählen, etwa die 16 im so genannten *Hexadezimalsystem*. Hier müssen wir weitere Ziffern erfinden — gebräuchlich sind $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$.

Die Zahl 41855 z.B. lautet im Hexadezimalsystem $A37F_{16}$ wegen

$$\begin{aligned} & A \cdot 16^3 + 3 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16^1 + F \cdot 16^0 \\ = {} & 10 \cdot 4096 + 3 \cdot 256 + 7 \cdot 16 + 15 \cdot 1 \\ = {} & 41855_{10}. \end{aligned}$$

Zahlen im Rechner: Dualsystem

Das wichtigste aller Systeme bezüglich einer von 10 verschiedenen Basis ist das *Dualsystem* mit Basis 2 und dem Ziffernvorrat $\{0, 1\}$, welches in Computern verwendet wird. Die Zahl 41855 etwa lautet im Dualsystem als *Binärzahl*

$$
\begin{array}{l}
1010001101111111_2 \\
= \quad 2^{15}+ \quad 2^{13}+ \quad 2^9+ \quad 2^8+ \quad 2^6+ \quad 2^5+ \quad 2^4+ \quad 2^3+ \quad 2^2+ \quad 2^1+ \quad 2^0 \\
= \quad 32768+ \quad 8192+ \quad 512+ \quad 256+ \quad 64+ \quad 32+ \quad 16+ \quad 8+ \quad 4+ \quad 2+ \quad 1 \\
= 41855_{10}
\end{array}
$$

Zahlen im Rechner: Datentyp INTEGER

Man kann nun natürlich nicht nur natürliche Zahlen $I\!N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ im Dualsystem darstellen, sondern z.B. auch die negativen Zahlen $\{\ldots, -3, -2, -1\}$.

Hier gibt es mehrere Möglichkeiten, von denen die einfachste die Hinzunahme eines Vorzeichenbits wäre, welches $+$ oder $-$ im Rechner darstellt.

In der Praxis verwendet man aber die so genannte *Zweierkomplement-Darstellung*. Damit haben wir einen Datentyp erhalten, der in den meisten Programmiersprachen INTEGER genannt wird.

Zahlen im Rechner: Datentyp REAL

Was ist nun aber mit den reellen Zahlen, also etwa für Zahlen mit Komma bzw. Dezimalpunkt? Kein Problem, man kann ja auch Potenzen mit *negativen* Exponenten benutzen, also etwa

$$\begin{array}{llrlrlrlrlr}
21.375 & & & & & & & & & & \\
= & 2\cdot & 10^1 & +1\cdot & 10^0 & +3\cdot & 10^{-1} & +7\cdot & 10^{-2} & +5\cdot & 10^{-3} \\
= & 2\cdot & 10 & +1\cdot & 1 & +3\cdot & 0.1 & +7\cdot & 0.01 & +5\cdot & 0.001.
\end{array}$$

Dies funktioniert auch im Dualsystem

$$\begin{aligned}
10101.011_2 &= 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 \\
&\quad +0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} \\
&= 16 + 4 + 1 + 0.25 + 0.125 \\
&= 21.375_{10}.
\end{aligned}$$

Zahlen im Rechner: Gleitkommazahlen

Nun arbeitet der Rechner i.Allg. nicht mit *Festkommazahlen*, sondern mit *Gleitkommazahlen*.

Beispiel:
Elementarladung (in Coulomb)
$1.60219 \cdot 10^{-19}$ („Gleitkommazahl")
$= 0.000000000000000000160219$
(„Festkommazahl")

Die Gleitkommadarstellung einer Zahl (oder *Gleitpunktdarstellung*, wenn man wie im angelsächsischen Raum einen Dezimalpunkt verwendet) lautet dann:

$$z = \pm\, m \cdot b^E$$

mit m Mantisse, b Basis und E Exponent.

Zahlen im Rechner: normierte Gleitpunktdarstellung

Man kann die Gleitpunktdarstellung

$$z = \pm\, m \cdot b^E$$

(mit m Mantisse, b Basis und E Exponent) eindeutig machen, indem man $b^{-1} \leq m < 1$ für $m \neq 0$ fordert — dies heißt einfach, dass die Mantisse in der Gleitpunktdarstellung mit „0 Punkt" beginnt und nach dem „Punkt" eine Ziffer ungleich 0 folgt (außer wenn man die Zahl 0 selbst darstellen will).

Im Beispiel der Elementarladung hätten wir

$$\underbrace{0.160219}_{\text{Mantisse}} \cdot \underbrace{10}_{\text{Basis}}{}^{20} \longleftarrow \text{Exponent}$$

in der so genannten *normierten Gleitpunktdarstellung*.

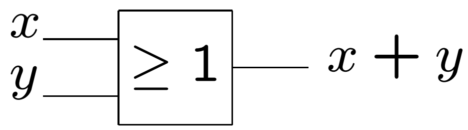
Bedeutung des Dualsystems

Das Dualsystem ist deshalb derart wichtig, weil man die beiden Ziffern 1 und 0 im Zusammenhang mit elektronischen Schaltungen als „Strom an“ bzw. “Strom aus“ interpretieren kann.

ODER-Schaltung

Es lassen sich nun Schaltelemente definieren, etwa die ODER-Schaltung, bei der genau dann Strom fließt, wenn mindestens einer der Schalter geschlossen ist (das entspräche physikalisch einer Parallelschaltung). Das Schaltsymbol für dieses *Gatter* sieht wie folgt aus:

ODER:

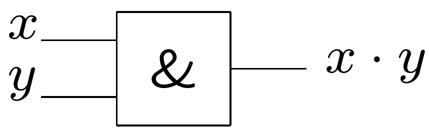


Dabei sind (links im Symbol) x und y die Eingänge des Gatters; der Ausgang (im Schaltbild rechts) wird meist mit $x + y$ bezeichnet.

UND-Schaltung

Analog gibt es das UND-Gatter, bei dem genau dann Strom fließt, wenn beide Schalter geschlossen sind (Serienschaltung), mit dem Schaltsymbol:

UND:

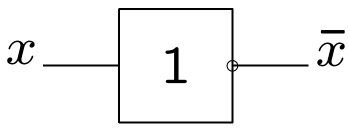


Hier steht $x \cdot y$ für den Ausgang.

NICHT-Schaltung

Hinzu käme dann noch ein NICHT-Gatter, bei dem genau dann Strom fließt, wenn bei x kein Strom fließt

NICHT:



Wertetabellen

Die Funktionsweise der ODER-, UND- und NICHT-Gatter mit den Schaltwerten 0 und 1 lässt sich auch durch folgende Wertetabellen wiedergeben:

ODER:

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

UND:

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NICHT:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Halbaddierer

Mit derartigen Schaltungen kann man z.B. schon eine einfache Addition realisieren: Ein so genannter *Halbaddierer* habe die Eingänge x und y sowie die Ausgänge s (wie Summe) und $\ddot{u}$ (wie Übertrag). Die binäre Addition ($0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ und $1 + 1 = 10$) lässt sich dann durch folgende Tabelle wiedergeben:

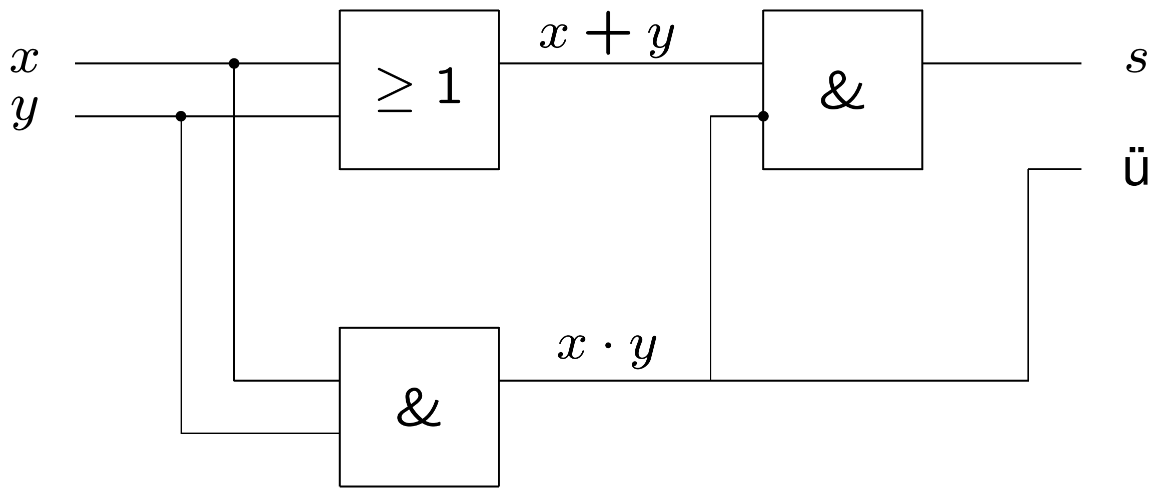
x	y	ü	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0.

Man sieht direkt, dass sich der Übertrag $\ddot{u}$ ganz einfach durch die UND-Schaltung realisieren lässt: $u = x \cdot y$. Eine Formel für die Summe zu finden, ist bereits schwieriger: Wie wäre es mit

$$s = (x + y) \cdot \overline{x \cdot y}$$

Halbaddierer (Fortsetzung)

Insgesamt ergibt sich dann (mit den bekannten Gattern) das folgende Schaltnetz:



(Zu beachten ist, dass das am weitesten rechts stehende UND-Gatter die beiden Eingänge $x+y$ sowie $\overline{x \cdot y}$ besitzt. Das NICHT ($\overline{x \cdot y}$) im unteren Eingang des rechten UND-Gatters drückt sich im Schaltnetz durch den kleinen Kreis aus.)

Volladdierer

Beim so genannten *Volladdierer* käme ein weiterer Halbaddierer mit einem Eingang hinzu (der Übertrag aus einer vorherigen Addition). Auf diese Weise lassen sich nun Schaltnetze zusammenstellen, die mathematische Operationen im Rechner nachbauen.

(Die Bezeichnungen $x+y$ und $x \cdot y$ haben in diesem Zusammenhang die Bedeutung eines ODER- oder UND-Gatters, sie bezeichnen *nicht* die gewohnte Addition bzw. Multiplikation.)

Logische Operationen

Man kann nun die genannten Operationen UND, ODER und NICHT auch als logische Operationen auffassen, so wie wir mit den Worten „und“, „oder“ und „nicht“ Sätze miteinander verbinden bzw. verneinen.

Wenn also A und B für zwei Sätze stehen, so bezeichne $\bar{A}$ die Verneinung (Negation) des Satzes A, $A \wedge B$ die Konjunktion der beiden Sätze („A und B“) sowie $A \vee B$ die Disjunktion der beiden Sätze („A oder B“). Mit „oder“ ist hier das so genannte „einschließende oder“ gemeint.

Die Tabellen für diese logischen Verknüpfungen lesen sich analog zu den Wertetabellen, wenn wir 0 als „falsch“ und 1 als „wahr“ interpretieren.

Logische Verknüpfungen in Programmmiersprachen

In der Aussagenlogik werden nun gerade logische Verknüpfungen untersucht.

Das muss kein Selbstzweck sein, denn in Programmmiersprachen sind logische Ausdrücke bei Entscheidungen in Kontrollstrukturen (Schleifen und Verzweigungen) unabdingbar:

IF ($i < 100$ AND abbruch=0) THEN ...

(Wenn i kleiner als 100 ist und eine Abbruchvariable gleich 0 gesetzt wurde, dann führe ... aus).

So besitzen viele Programmiersprachen logische Standardtypen (wie LOGICAL, BOOLEAN oder BOOL) und logische Operationen wie eben AND, OR und NOT.

Äquivalenzen in der Aussagenlogik

Man stellt nun in der Aussagenlogik etwa fest, dass gewisse durch Verknüpfung entstandene Formeln völlig gleichwertig („äquivalent“) sind, da sie bei jeder möglichen Kombination von Belegungen mit 1 und 0 („wahr“ und „falsch“) denselben Wert annehmen. Als Beispiel sei hier die folgende Formel genannt:

$$\overline{A \wedge B} \Longleftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}.$$

Die Ähnlichkeit zu einer Rechenregel in der Mengenlehre, nämlich zu den DeMorgan’schen Gesetzen, ist auffällig:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Offenbar entspricht der logischen Konjunktion die Schnittmenge (Durchschnitt) bei den Mengenoperationen und der logischen Disjunktion die Vereinigungsmenge. Der logischen Negation entspricht die Komplementbildung in der Mengenlehre.

Entsprechung zwischen Mengenlehre und Aussagenlogik

Interessant ist nun, dass für die Aussagenlogik mit den Operationen $\wedge$, $\vee$, $^{-}$ genau die gleichen Rechenregeln gelten wie in der Mengenlehre für die Verknüpfungen $\cap$, $\cup$, $^{-}$. Auch die Verknüpfungen UND, ODER, NICHT in der Schaltalgebra gehorchen analogen Gesetzen.

Dieser Tatsache trägt die Mathematik Rechnung, indem sie den abstrakten Begriff Boole'scher Verband für entsprechende Strukturen eingeführt hat.

Der Vorteil ist nämlich dann der, dass alles, was man für Boole'sche Verbände gezeigt hat, nun sowohl im Modell der Mengenlehre als auch in der Aussagenlogik und sogar in der Schaltalgebra gilt — es muss also nur einmal gezeigt werden.