Kapitel 10

Differentialgleichungen

- Einführung
- Grundbegriffe
- Lösungstechniken
- Lineare Differentialgleichungen
- Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
- Anwendungen

Differentialgleichungen

Definition

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer gesuchten Funktion auftreten, nennt man eine Differentialgleichung (abgekürzt: Dgl.).

Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen

Hängt die gesuchte Funktion in der Differentialgleichung nur von einer einzigen Veränderlichen ab, kommen also mit anderen Worten nur „gewöhnliche" Ableitungen in der Differentialgleichung vor, so spricht man von einer **„gewöhnlichen Differentialgleichung"**.

Hängt hingegen die gesuchte Funktion von mehreren Variablen ab, d.h. kommen partielle Ableitungen in der Differentialgleichung vor, so liegt eine **„partielle Differentialgleichung"** vor. In diesem Kapitel werden fast ausschließlich gewöhnliche Differentialgleichungen besprochen.

Terminologie

Eine wichtige Bemerkung zur Terminologie vorneweg: Wir sind gewohnt, Funktionen mit $f(x)$ zu bezeichnen. Bei Differentialgleichungen heißen Funktionen allgemein immer $y(x)$ (höchstens einmal $x(t)$, $y(t)$).

Warum?

Nun, man kann sich im Zusammenhang mit Differentialgleichungen vieles im x, y-Koordinatensystem veranschaulichen. Oft ist es dabei sinnvoll, sich Funktionswerte $y(x)$ als Werte auf der y-Achse vorzustellen.

Beispiel

Im Abschnitt über die Integration von Funktionen haben wir Gleichungen wie

$$f'(x) = 2x$$

kennen gelernt und durch Integration die Lösung

$$f(x) = x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

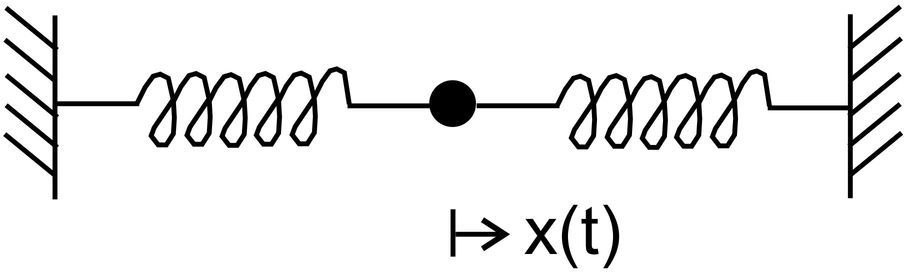
erhalten.

Letztlich hatten wir es schon hier mit (einfachen) Differentialgleichungen zu tun.

Beispiel

Ein lineares Federpendel wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -D \cdot x.$$



Unbekannt ist hier die Auslenkung x in Abhängigkeit von der Zeit t.

Beispiel
Die Wärmeleitungsgleichung

$$T_t = c \cdot \Delta T = c \cdot (T_{xx} + T_{yy})$$

ist eine partielle *Differentialgleichung. Gesucht ist die Temperatur* $T(x, y, t)$*, die von zwei Ortsvariablen* x, y *und von der Zeit* t *abhängt. Wie bei vielen partiellen Differentialgleichungen tritt hier der so genannte* Laplace-Operator *auf:* $\Delta := \partial_{xx} + \partial_{yy}$.

Mit dieser Wärmeleitungsgleichung kann man z.B. beschreiben, wie sich Wärme in einer dünnen 2-dimensionalen Platte ausbreitet.

Beispiel

Die Maxwellschen Gleichungen aus der Elektrodynamik — oft teilweise bekannt aus dem Physikunterricht der Schule — bilden ein System *partieller Differentialgleichungen für die elektrischen und magnetischen Feldgrößen* $\vec{E}$*,* $\vec{D}$*,* $\vec{H}$ *und* $\vec{B}$ *als Funktionen von Raum* x, y, z *und Zeit* t*.*

Klassifikation von Dgl.n: Ordnung, explizit, implizit

Definition

Die höchste in einer Differentialgleichung

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

vorkommende Ableitung $y^{(n)}$ bestimmt die Ordnung n der Differentialgleichung. Lässt sich die Differentialgleichung nach dieser höchsten Ableitung auflösen:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

so heißt die Differentialgleichung explizit, anderenfalls implizit.

Beispiel

Die Differentialgleichung

$$y' - 2xy = 0$$

ist eine explizite Differentialgleichung erster Ordnung:

Die höchste vorkommende Ableitung ist y', und die Differentialgleichung kann nach diesem y' aufgelöst werden.

Man könnte

$$y' = f(x, y) \text{ mit } f(x, y) = 2xy$$

schreiben.

Lösung einer Dgl.

Definition

Eine Funktion $y = y(x)$ heißt Lösung (manchmal auch Integral) einer Differentialgleichung, wenn diese Funktion mitsamt ihren Ableitungen eingesetzt in die Differentialgleichung diese erfüllt.

Beispiel

Die Differentialgleichung

$$y' - 2xy = 0$$

hat die Lösung

$$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{x^2}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ *beliebig, da*

$$y' = c\,\mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x = y \cdot 2x$$

gilt.

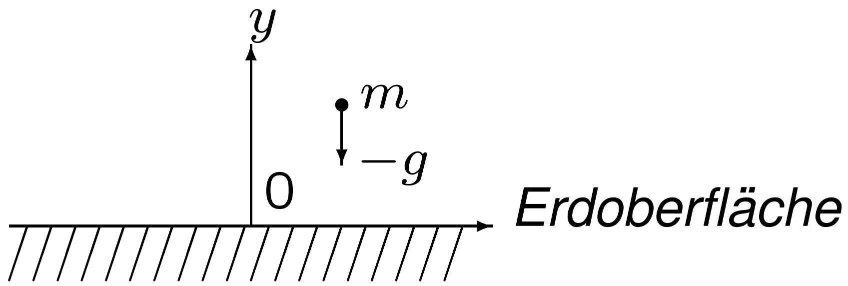
Übung

Bestimmen Sie die Lösung der expliziten Differentialgleichung 2. Ordnung des freien Falls

$$\ddot{y} = -g$$

(ohne Luftwiderstand) durch zweimalige Integration.

Zur Notation: Die Bewegung eines Massenpunktes m *erfolgt unter dem Einfluss der Schwerkraft. Wir betrachten das Problem in einem kartesischen Koordinatensystem und bestimmen die Lagekoordinate* y *des Massenpunktes in Abhängigkeit von der Zeit* t*.*



Lösung

Zweimalige Integration von

$$\ddot{y} = -g$$

liefert

$$\dot{y}(t) = \int \ddot{y}(t)\,dt = -\int g\,dt = -gt + c_1$$

und

$$\begin{aligned} y(t) &= \textstyle\int \dot{y}(t)\,dt = \int (-gt + c_1)\,dt \\ &= -\frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2. \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung einer Dgl.

Auch bei anderen (komplizierteren) Differentialgleichungen erhält man im Prinzip durch Umkehrung der Differentiation, also durch Integration, die Lösung. Allgemein sind also bei der Ermittlung der Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung n Integrationen erforderlich. Entsprechend treten n Integrationskonstanten c_1, c_2 bis c_n in der Lösung auf:

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält n willkürliche, voneinander unabhängige Parameter (Integrationskonstanten), besitzt also die Form

$$y(x) = y(x; c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Man erhält somit als Lösung der Differentialgleichung eine n-parametrige Kurvenschar.

Physikalisch sinnvolle Zusatzbedingungen

Die in der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung auftretenden Parameter lassen sich durch Zusatzbedingungen festlegen.

Physikalisch sinnvolle Zusatzbedingungen werden meist in der Form von Anfangsbedingungen oder Randbedingungen vorgegeben.

Durch Vorgabe von derartigen Bedingungen eliminiert man die Parameter aus der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung und erhält damit eine *partikuläre Lösung*.

Physikalisch sinnvolle Zusatzbedingungen: Anfangsbedingungen

Beispiel

Die Differentialgleichung 2. Ordnung des freien Falls hat die allgemeine Lösung

$$y(t; c_1, c_2) = -\frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2$$

mit den beiden Parametern c_1 und c_2.
Durch die Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$ *und* $\dot{y}(0) = v_0$ *werden Anfangslage y_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 des fallenden Massenpunktes vorgegeben.*

Die partikuläre Lösung der Differentialgleichung unter diesen Anfangsbedingungen lautet dann:

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0.$$

Für $y_0 = 5$ und $v_0 = 2$ ergibt sich etwa:

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + 2t + 5.$$

Physikalisch sinnvolle Zusatzbedingungen: Randbedingungen

Beispiel

Die Differentialgleichung 2. Ordnung des freien Falls hat die allgemeine Lösung

$$y(t; c_1, c_2) = -\frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2$$

mit den beiden Parametern c_1 *und* c_2*.*
Gibt man die Lage des Massenpunktes zu zwei verschiedenen Zeiten an, etwa $y(0) = 3$ *und* $y(1) = 0$*, so erhält man durch diese beiden* Randbedingungen *ein Gleichungssystem,* $y(0) = c_2 = 3$ *und* $y(1) = \frac{-g}{2} + c_1 + c_2 = 0$*, mit den Lösungen* $c_2 = 3$*,* $c_1 = \frac{g}{2} - 3$*.*

Die partikuläre Lösung der Differentialgleichung unter diesen Randbedingungen lautet dann:

$$y(t) = \frac{-gt^2}{2} + (\frac{g}{2} - 3)t + 3.$$

Anfangs- und Randbedingungen

Eine partikuläre Lösung kann man aus der allgemeinen Lösung

$$y(x) = y(x; c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

einer Differentialgleichung n-ter Ordnung erhalten

- **durch die Vorgabe von Anfangsbedingungen:**

  $$y(x_0),\ y'(x_0),\ y''(x_0), \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)$$

  (Funktionswert und weitere Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten an einer speziellen Stelle x_0) oder
- **durch die Vorgabe von Randbedingungen:**

  $$y(x_1),\ y(x_2),\ \ldots,\ y(x_n)$$

  (Funktionswerte an verschiedenen Stellen).

Übung

Die Differentialgleichung zur Beschreibung eines linearen Federpendels $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (mit $\omega^2 = \frac{D}{m}$) hat die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$

Bestimmen Sie die Lösung dieser Differentialgleichung unter den folgenden Zusatzbedingungen:

a) *Anfangsbedingungen* $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2\omega$,

b) *Randbedingungen* $x(0) = 1$, $x(\frac{\pi}{2\omega}) = 1$,

c) *Randbedingungen* $x(0) = 1$, $x(\frac{\pi}{\omega}) = 1$,

d) *Randbedingungen* $x(0) = 1$, $x(\frac{\pi}{\omega}) = -1$.

Anfangs- und Randbedingungen

a) *Lösung*

Wir notieren hier zunächst die Lösung und ihre Ableitung:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \\ \dot{x}(t) &= -c_1\omega \sin(\omega t) + c_2\omega \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2\omega$ *ergibt:*

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 = 1, \\ \dot{x}(0) &= -c_1\omega \sin(0) + c_2\omega \cos(0) = \omega c_2 = 2\omega. \end{aligned}$$

Also $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ *und* $x(t) = \cos(\omega t) + 2\sin(\omega t)$.

Anfangs- und Randbedingungen

b) *Lösung*

Wir notieren hier zunächst die Lösung und ihre Ableitung:

$$\begin{array}{rcrcr} x(t) & = & c_1 \cos(\omega t) & + & c_2 \sin(\omega t), \\ \dot{x}(t) & = & -c_1\omega \sin(\omega t) & + & c_2\omega \cos(\omega t). \end{array}$$

Einsetzen der Randbedingungen $x(0) = 1$, $x(\frac{\pi}{2\omega}) = 1$ *ergibt:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x(0) & = & c_1 \cos(0) & + & c_2 \sin(0) & = & c_1 & = & 1, \\ x(\frac{\pi}{2\omega}) & = & c_1 \cos(\frac{\pi}{2}) & + & c_2 \sin(\frac{\pi}{2}) & = & c_2 & = & 1. \end{array}$$

Also $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ *und* $x(t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t)$.

Anfangs- und Randbedingungen

c) *Lösung*

Wir notieren hier zunächst die Lösung und ihre Ableitung:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \\ \dot{x}(t) &= -c_1 \omega \sin(\omega t) + c_2 \omega \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Einsetzen der Randbedingungen $x(0) = 1$, $x(\frac{\pi}{\omega}) = 1$ *ergibt:*

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 = 1, \\ x(\tfrac{\pi}{\omega}) &= c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) = -c_1 = 1. \end{aligned}$$

Also $c_1 = 1$, $c_1 = -1$ *(ein Widerspruch!) und somit* keine *Lösung!*

Anfangs- und Randbedingungen

d) *Lösung*

Wir notieren hier zunächst die Lösung und ihre Ableitung:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \\ \dot{x}(t) &= -c_1\omega \sin(\omega t) + c_2\omega \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Einsetzen der Randbedingungen $x(0) = 1$, $x(\frac{\pi}{\omega}) = -1$ *ergibt:*

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 = 1, \\ x(\tfrac{\pi}{\omega}) &= c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) = -c_1 = -1. \end{aligned}$$

Also $c_1 = 1$, $c_1 = 1$ *und somit* unendlich viele *Lösungen*
$x(t) = \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ *mit* $c_2 \in \mathbb{R}$.

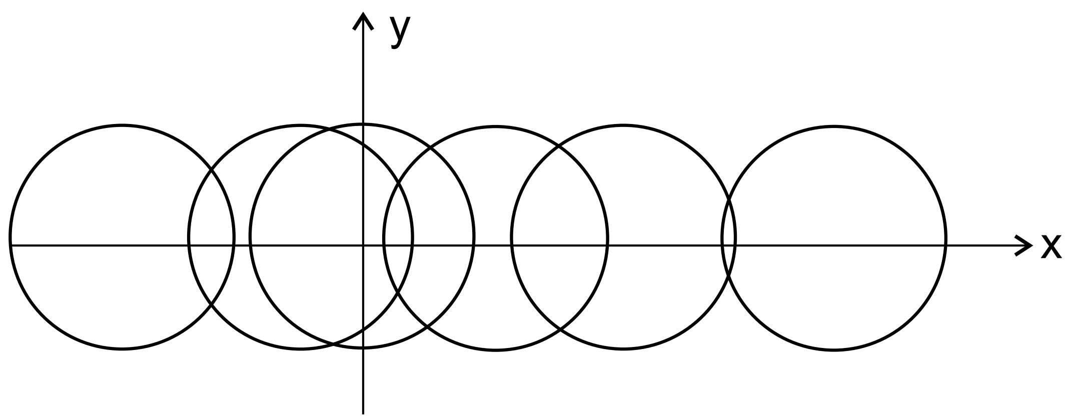
n-parametrige Kurvenschar und zugehörige Dgl.

Von Differentialgleichungen n-ter Ordnung sind wir zu ihren allgemeinen Lösungen, nämlich n-parametrigen Kurvenscharen, gelangt. Umgekehrt kann man auch zu einer n-parametrigen Kurvenschar (Differenzierbarkeit vorausgesetzt) die passende Differentialgleichung ermitteln.

Beispiel

Wir betrachten im Folgenden Kreise mit dem Radius 1 *und Mittelpunkt auf der* x*-Achse:*

$$(x-c)^2 + y^2 = 1^2.$$



n-parametrige Kurvenschar und zugehörige Dgl.

Beispiel

Kreise mit dem Radius 1 *und Mittelpunkt auf der* x*-Achse werden beschrieben durch:*

$$(x-c)^2 + y^2 = 1^2$$

bzw. differenziert (Kettenregel für $y = y(x)$*):*

$$2(x-c) + 2yy' = 0.$$

Wir eliminieren nun den Parameter c*.*
Mit $(x-c) = -yy'$ *eingesetzt in die Kreisgleichung ergibt sich:*

$$(yy')^2 + y^2 = 1.$$

Zur einparametrigen Kurvenschar $(x-c)^2 + y^2 = 1^2$ *gehört also die (implizite) Differentialgleichung 1. Ordnung* $(yy')^2 + y^2 = 1$ *— und umgekehrt.*

Übung

Zu welcher Differentialgleichung gehört die einparametrige Kurvenschar $y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{x^2}$?

Lösung

Ableiten von $y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{x^2}$ ergibt $y'(x) = c \cdot 2x\, \mathrm{e}^{x^2}$. Wir eliminieren nun den Parameter c. Auflösen beider Gleichungen nach c liefert:

$$c = y(x)/\mathrm{e}^{x^2} = y'(x)/(2x \cdot \mathrm{e}^{x^2})$$

und nach Multiplikation mit e^{x^2} erhalten wir die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = 2xy.$$

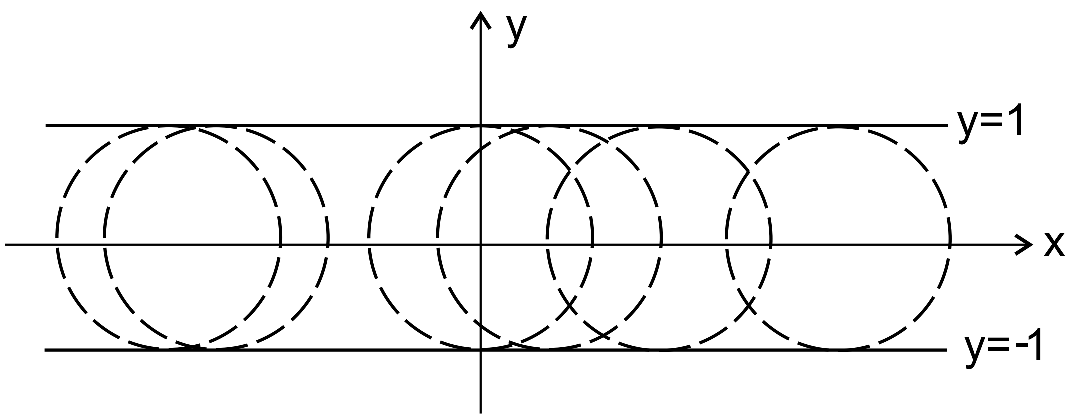
Singuläre Lösungen

Am Beispiel der Kreise werden wir gleich sehen, dass zusätzliche Lösungen zur zugehörigen Differentialgleichung hinzukommen können:

Beispiel
Die Differentialgleichung $(yy')^2 + y^2 = 1$ *hat zwei zusätzliche Lösungen, die keine Kreise darstellen, nämlich*

$$y = +1 \quad \textit{und} \quad y = -1.$$

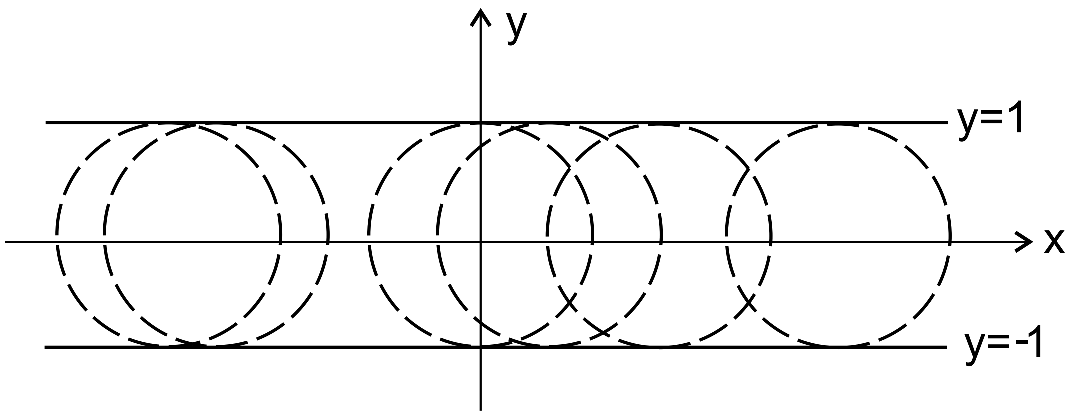
Diese beiden Geraden hüllen die Kurvenschar der Kreise ein.



Singuläre Lösungen

Jeder Kreis wäre eine spezielle Lösung, die sich durch Wahl des Parameters c aus der allgemeinen Lösung, der einparametrigen Kurvenschar der Kreise, gewinnen ließe.

Die Geraden sind trivialerweise keine Kreise, lassen sich also *nicht* aus der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung durch spezielle Wahl der Konstanten bestimmen. Solche zuweilen auftretenden zusätzlichen Lösungen heißen *singulär*.



Übung

Zeigen Sie, dass $y = 1$ Lösung der Differentialgleichung $(yy')^2 + y^2 = 1$ ist!

Lösung

Wegen $y = 1$ ist $y' = 0$. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt $(1 \cdot 0)^2 + 1^2 = 1$. Also erfüllt $y = 1$ die Differentialgleichung $(yy')^2 + y^2 = 1$.

Richtungsfeld

Explizite Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$y' = f(x, y)$$

haben den Vorteil, dass man sich graphisch sehr leicht einen Überblick über den Verlauf der Lösung $y(x)$ verschaffen kann.

Man ordnet dazu einfach jedem Punkt (x, y) der Ebene den Wert $m = y'(x)$ zu, welcher die Steigung der gesuchten Funktion, d.h. die Richtung der Tangente an den Graphen von $y(x)$ angibt. Da jedem Punkt (x, y) eine bestimmte Richtung zugeordnet wird, erhalten wir ein so genanntes *Richtungsfeld*.

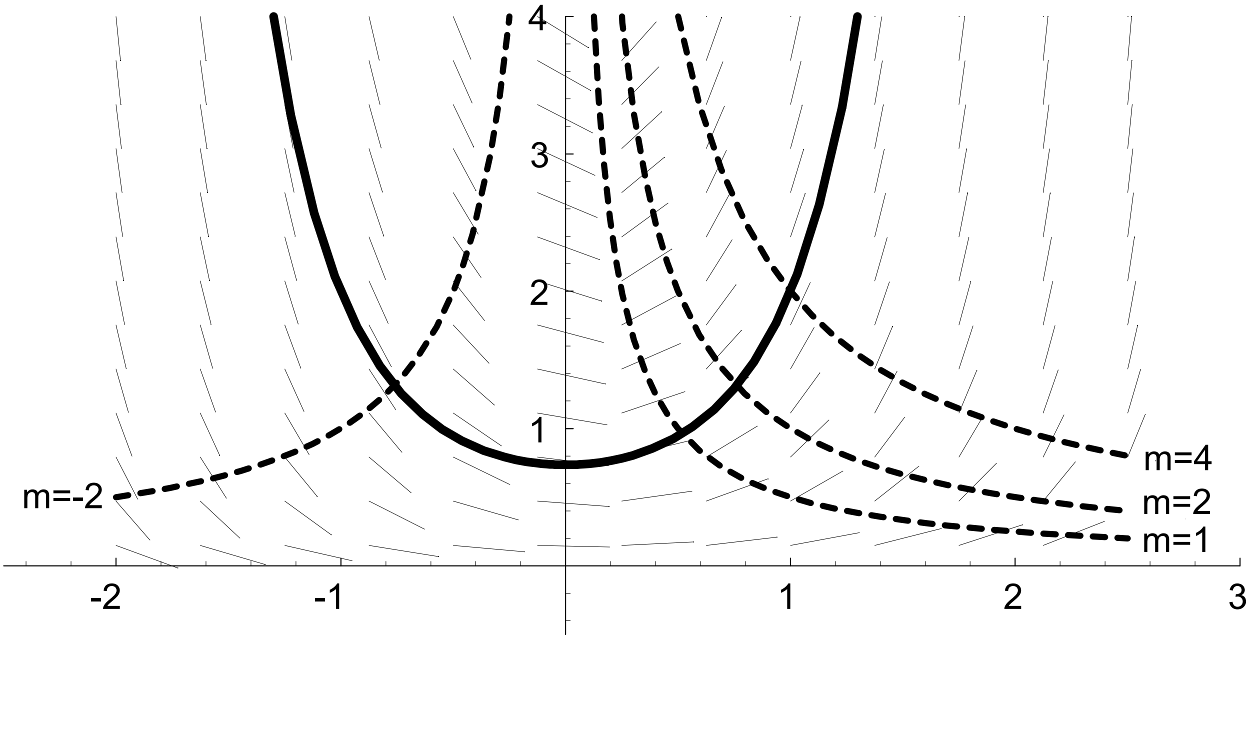
Linienelemente, Isoklinen

Die einzelnen Punkte (x, y) mit ihrer zugeordneten Steigung m heißen *Linienelemente*, Punkte mit der gleichen Tangentensteigung nennt man *Isoklinen*.

Die Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ erhält man dann einfach, indem man alle Kurven auswählt, die auf das Richtungsfeld „passen“: Diese Kurven besitzen in jedem Punkt eine Tangente mit derselben Steigung wie das Linienelement an diesem Punkt.

Beispiel

Das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = 2xy$ ist aus folgender Abbildung ersichtlich. Isoklinen sind in diesem Fall alle Kurven mit $f(x, y) = 2xy = m$ mit einer Konstanten m, also Hyperbeln der Form $y(x) = m/(2x)$. Eingezeichnet ist außerdem eine mögliche Lösungskurve, die annähernd parabelförmig aussieht.



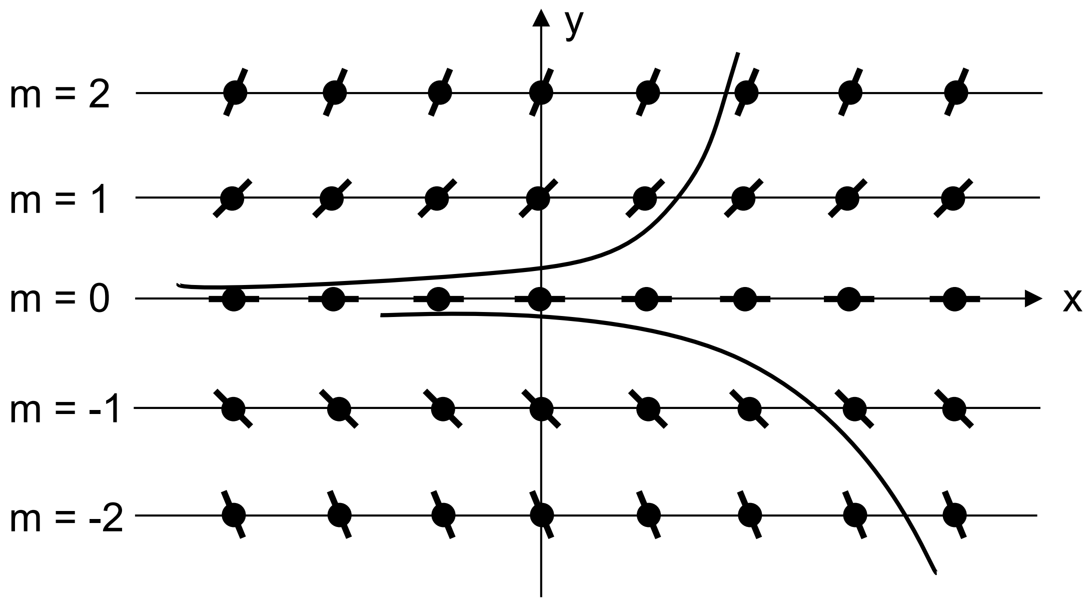
Übung

Zeichnen Sie Richtungsfeld, Isoklinen und eine mögliche Lösung im Falle der Differentialgleichung

$$y' = y.$$

Lösung

Das Richtungsfeld ist aus folgender Abbildung ersichtlich:



Isoklinen sind alle Kurven mit $f(x, y) = y = m$, d.h. alle Parallelen zur x-Achse. Die Lösungskurven haben die Gestalt $y(x) = c\,\mathrm{e}^x$, sind also Exponentialfunktionen.

Existenz- und Eindeutigkeit einer Lösung

Einer expliziten Differentialgleichung 1. Ordnung der Gestalt $y' = f(x, y)$ kann man zunächst nicht einfach ansehen, ob sie eine Lösung besitzt und — wenn ja — ob diese eindeutig ist.

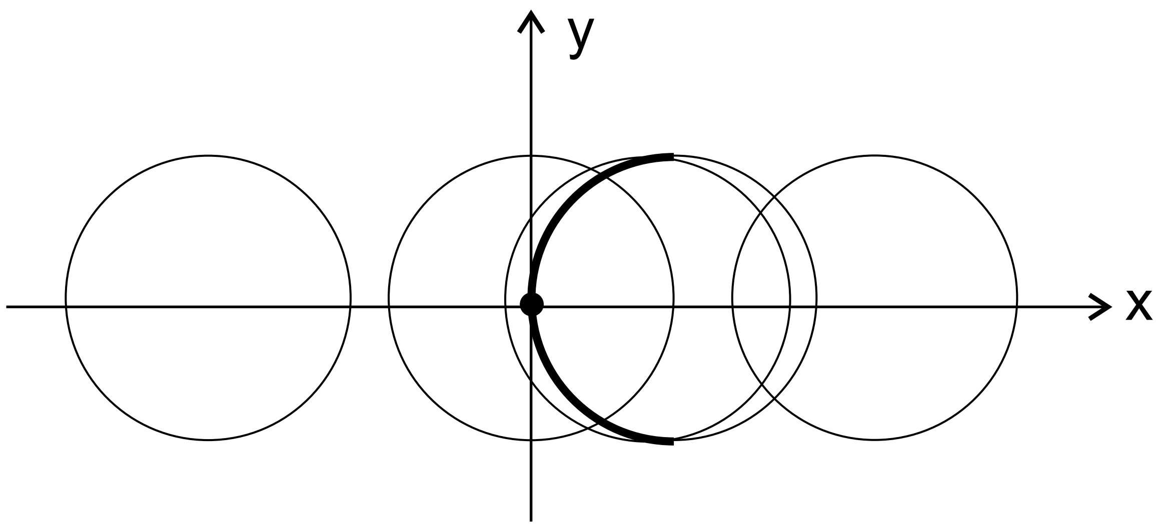
Unter gewissen recht einfachen Voraussetzungen an die Funktion $f(x, y)$ (Stetigkeit und so genannte Lipschitz-Bedingung) kann man jedoch die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $y(x)$ zu einer vorgegebenen Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ zeigen. Dies geschieht in den Sätzen von Peano und Picard-Lindelöf, auf die wir hier jedoch nicht näher eingehen.

Beispiel für Nicht-Eindeutigkeit einer Lösung

Ein Beispiel, bei dem die Lösung einer Differentialgleichung *nicht eindeutig* ist, zeigt folgende Abbildung: Hier geht es um die Lösung der Differentialgleichung

$$(yy')^2 + y^2 = 1$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ bei Wahl der Anfangsbedingung $y(0) = 0$. Hier ist sowohl der Kreisabschnitt oberhalb wie auch der unterhalb der x-Achse Lösung der Anfangswertaufgabe.



Numerische Lösungsverfahren

Um die Lösung $y(x)$ einer Differentialgleichung konkret zu ermitteln, existieren verschiedene Lösungsverfahren, von denen wir einen Teil im folgenden Abschnitt kennen lernen werden. In vielen Fällen, über die man in der Numerischen Mathematik mehr erfährt, lassen sich jedoch keine Lösungen, sondern nur Näherungen finden (z.B. mit dem Verfahren von Euler, mit dem Verfahren von Runge-Kutta etc.). Hier geht man meist nicht von der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

aus, sondern wandelt diese in eine Integralgleichung folgender Form um:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Systeme von Differentialgleichungen

Beispiel
Die Differentialgleichung 2. Ordnung $y'' + y = 0$ *hat die allgemeine Lösung* $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ *mit den beiden Parametern* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Man könnte anstelle dieser Differentialgleichung auch das System *von* 2 *Differentialgleichungen*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & -y_2, \\ y_2' & = & y_1 \end{array} \right\}$$

untersuchen. Hier erhalten wir die Lösungen

$$y_1(x) = \cos x \quad \textit{und} \quad y_2(x) = \sin x.$$

(Die Ableitung vom $\cos x$ *ist* $-\sin x$*, die Ableitung von* $\sin x$ *ist* $\cos x$*.)*
Die Differentialgleichung 2. Ordnung und das System hängen über $y(x) = y_1(x)$ *und* $y'(x) = y_2(x)$ *zusammen.*

„Trennung der Veränderlichen"

Ein sehr einfaches Verfahren — genannt „Trennung der Veränderlichen" oder „Separation der Variablen" — lässt sich anwenden, wenn die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ so beschaffen ist, dass $f(x, y)$ multiplikativ in zwei Anteile zerfällt: einer, in dem nur x, und einer, in dem nur y vorkommt, d.h.

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y).$$

Beispiel
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = 2xy.$$

Hier gilt

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

mit

$$g(x) = 2x \text{ und } h(y) = y.$$

„Trennung der Veränderlichen“

Der „Trick“ bei dem nun folgenden Lösungsverfahren beruht darauf, die Terme voneinander zu trennen und einzeln — nach x und y separiert — zu integrieren. Dabei ist es hilfreich,

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

zu schreiben und formal dy bzw. dx als Zähler bzw. Nenner des Bruches aufzufassen.

„Trennung der Veränderlichen“

Beispiel

Wir betrachten wiederum die Differentialgleichung $y' = 2xy$, schreiben aber nun

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot y$$

und trennen formal x- bzw. y-Terme:

$$\frac{dy}{y} = 2x \cdot dx.$$

Jetzt integrieren wir auf beiden Seiten, d.h.

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x \, dx$$

und erhalten (links nach y, rechts nach x integrieren)

$$\ln |y| = x^2 + \tilde{c}.$$

„Trennung der Veränderlichen“

Beispiel (Fortsetzung)
Wir haben erhalten:

$$\ln|y| = x^2 + \tilde{c}.$$

Da wir an der Lösung y interessiert sind und nicht am natürlichen Logarithmus davon, wenden wir die Exponentialfunktion (d.h. die Umkehrfunktion des natürlichen Logarithmus) auf obige Gleichung an:

$$|y| = \mathrm{e}^{\ln|y|} = \mathrm{e}^{x^2+\tilde{c}} = \mathrm{e}^{\tilde{c}} \cdot \mathrm{e}^{x^2}.$$

Links und rechts stehen nur positive Größen. Wenn wir aber auf der rechten Seite nicht nur positive Konstanten $\mathrm{e}^{\tilde{c}} > 0$ zulassen, sondern irgendwelche Konstanten $c \in \mathbb{R}$, so erhalten wir

$$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{x^2}.$$

Übung

Bestimmen Sie durch „Trennung der Veränderlichen“ die Lösungen folgender Differentialgleichungen:

a) $y' = y$, *b)* $y' = 2y/x$.

Lösung

Durch „Trennung der Veränderlichen“ erhalten wir jeweils:

a) $\int \frac{dy}{y} = \int dx$ *führt auf*

$$\ln|y| = x + \tilde{c}$$

bzw.

$$|y| = \mathrm{e}^{\tilde{c}} \cdot \mathrm{e}^{x}$$

und

$$y = c \cdot \mathrm{e}^{x}.$$

b) $\int \frac{dy}{y} = \int 2\frac{dx}{x}$ *führt auf*

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \tilde{c}$$

bzw.

$$|y| = \mathrm{e}^{\tilde{c}} \cdot \mathrm{e}^{2\ln|x|} = \mathrm{e}^{\tilde{c}} \cdot |x|^2$$

und

$$y = c \cdot x^2.$$

„Trennung der Veränderlichen“

Die Lösungsmethode der „Trennung der Veränderlichen“ kann bei Differentialgleichungen der Form $y' = g(x) \cdot h(y)$ angewandt werden. Nach Umformung der Ausgangsgleichung in

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) \cdot dx$$

erfolgt beidseitige Integration:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) \cdot dx.$$

Sind auf beiden Seiten der Gleichung die Stammfunktionen bestimmt, ist ggf. nach y aufzulösen. Der Fall $h(y) = 0$ muss gesondert betrachtet werden.

Substitution

Manche Differentialgleichungen lassen sich durch Substitution derart umformen, dass eine Differentialgleichung entsteht, bei der man die Lösungstechnik „Trennung der Veränderlichen“ anwenden kann.

Beispiele sind Differentialgleichungen der Form

$$y' = f(ax + by + c).$$

Hier substituiert man $u(x) = ax + by(x) + c$ und rechnet mit der neuen Veränderlichen $u(x)$ anstelle von $y(x)$ weiter.

Beispiel
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = 3x + 4y - 5.$$

Hier bietet sich die Substitution

$$u(x) = 3x + 4y(x) - 5$$

an.
Differenzieren liefert

$$u' = 3 + 4y' \text{ bzw. } y' = (u' - 3)/4.$$

Durch Einsetzen erhält man die neue Differentialgleichung $(u' - 3)/4 = u$ *bzw.*

$$u' = \frac{du}{dx} = 3 + 4u.$$

Beispiel (Fortsetzung)
Wir haben erhalten:

$$u' = \frac{du}{dx} = 3 + 4u.$$

Nach „Trennung der Veränderlichen“ ergibt sich

$$\frac{1}{4}\int \frac{4\,du}{4u+3} = \int dx \quad \textit{und} \quad \frac{1}{4}\ln|4u+3| = x+c.$$

Also $|4u+3| = \mathrm{e}^c \cdot \mathrm{e}^{4x}$ *bzw.* $4u+3 = c\cdot \mathrm{e}^{4x}$ *und somit*

$$u = c\cdot \mathrm{e}^{4x} - 3/4.$$

Dabei wurden die Konstanten mehrfach umbenannt.

Wegen $u = 3x + 4y - 5$ *ergibt sich nach Rücktransformation als Lösung*

$$y = c\cdot \mathrm{e}^{4x} - \frac{3}{4}x + \frac{17}{16}.$$

Substitution

Ein weiteres Beispiel zur Anwendbarkeit von Substitutionen sind Differentialgleichungen der Gestalt

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

so genannte *Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen*.

In diesen Fällen führt die Substitution $u = y/x$ zum Ziel.

Übung

Führen Sie bei der Differentialgleichung

$$y' = 1 + \frac{y}{x}$$

die Substitution

$$u(x) = y(x)/x$$

durch.

(Leiten Sie dazu zunächst $y' = u'x + u$ her, lösen Sie die Differentialgleichung $u' = 1/x$ nach u und berechnen Sie danach y.)

Lösung

Wegen $u = y/x$ bzw. $y = u \cdot x$ führt die Produktregel beim Ableiten auf

$$y' = u' \cdot x + u \cdot 1.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung erhält man

$$u'x + u = 1 + u \qquad \textit{bzw.} \qquad u' = 1/x.$$

Die Lösung dieser transformierten Differentialgleichung lässt sich nun mittels „Trennung der Veränderlichen“ über $\int du = \int \frac{dx}{x}$ ermitteln zu

$$u = \ln|x| + c.$$

Wegen $y = u \cdot x$ ergibt sich für die ursprünglich gesuchte Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung

$$y = x \ln|x| + cx.$$

Weitere Lösungstechniken

Es gibt im Übrigen weitere Substitutionen und auch weitere ganz spezielle Lösungstechniken für bestimmte Differentialgleichungen (Bernoulli-Dgl., Riccati-Dgl., D'Alembert-Dgl., Clairaut-Dgl.), die meist aus speziellen physikalischen Fragestellungen heraus entstanden sind. Diese Lösungsansätze sind ggf. in der Spezialliteratur nachzuschlagen.

Lineare Differentialgleichungen

Definition

Eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung hat die Form

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots$$
$$+a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

(Meist ist $a_n(x) = 1$.)
Ist das so genannte Störglied $b(x)$ konstant gleich 0, so heißt die Differentialgleichung homogen, andernfalls inhomogen.

Beispiel
Die Differentialgleichung $(y'y)^2 + y^2 = 1$ *ist nicht linear.*

Dagegen ist $y' = 2xy$ *eine homogene lineare Differentialgleichung (mit* $a_1(x) = 1$, $a_0(x) = -2x$ *und* $b(x) = 0$*),*

$y'' + y = \sin x$ *ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung (mit* $a_2(x) = 1$, $a_1(x) = 0$, $a_0(x) = 1$ *und* $b(x) = \sin x$*).*

Lösungsstruktur linearer Dgl.n

Die Struktur der Lösungen y linearer Differentialgleichungen entspricht der Struktur der Lösungen linearer Gleichungssysteme:

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots$$
$$+a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

ist die Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung:

$$y_{\left\{\substack{\textbf{allgem.Lsg.}\\ \textbf{inhom.Dgl.}}\right\}} = y_{\left\{\substack{\textbf{spez.Lsg.}\\ \textbf{inhom.Dgl.}}\right\}} + y_{\left\{\substack{\textbf{allgem Lsg.}\\ \textbf{hom.Dgl.}}\right\}}$$

Lösungsstruktur linearer Dgl.n

Die Gesamtheit der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung hat die Gestalt

$$c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \ldots + c_n \cdot y_n(x),$$

durchläuft also alle Linearkombinationen aus n linear unabhängigen Basislösungen (auch Fundamentallösungen genannt) und bildet damit einen n-dimensionalen Vektorraum.

Beispiel
Um die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$y'' + y = \sin x$$

zu lösen, benötigt man zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y'' + y = 0$*. Man sieht, dass*

$$y_1(x) = \sin x \quad \textit{und} \quad y_2(x) = \cos x$$

Lösungen dieser homogenen Differentialgleichung sind (z.B. $y_1'' + y_1 = (\sin x)'' + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$*).*

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung besteht nun ganz einfach aus allen Linearkombinationen der beiden gefundenen linear unabhängigen Basislösungen, also

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Beispiel (Fortsetzung)

Nun wird noch eine *spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung* $y'' + y = \sin x$ *benötigt. Wir verifizieren, dass*

$$y(x) = -\frac{1}{2} x \cos x$$

eine derartige Lösung ist:

$$\begin{aligned} y'(x) &= -1/2 \cdot \cos x + 1/2 \cdot x \sin x, \\ y''(x) &= \sin x + 1/2 \cdot x \cos x, \end{aligned}$$

also $y'' + y = \sin x$*.*

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet damit

$$y(x) = \underbrace{-\frac{1}{2} x \cos x}_{\substack{\textit{spez.Lsg.} \\ \textit{inhom.Dgl.}}} + \underbrace{c_1 \sin x + c_2 \cos x}_{\substack{\textit{allg.Lsg.} \\ \textit{hom.Dgl.}}}.$$

Übung

Hätte man im Beispiel $y'' + y = \sin x$ als spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung auch $y(x) = 1/2\, x \cos x + 3 \cos x$ wählen können?

Lösung

Ja, denn auch hier gilt $y'' + y = \sin x$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung wäre entsprechend

$$y(x) = \underbrace{-\frac{1}{2} x \cos x + 3 \cos x}_{\substack{\textit{spez.Lsg.} \\ \textit{inhom.Dgl.}}} + \underbrace{c_1 \sin x + c_2 \cos x}_{\substack{\textit{allg.Lsg.} \\ \textit{hom.Dgl.}}};$$

sie unterscheidet sich nicht *von der Lösung im obigen Beispiel.*

Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' - 2xy = 1 - 2x^2.$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung $y' - 2xy = 0$ *hat die Lösung:*

$$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{x^2}.$$

Um nun die inhomogene Differentialgleichung zu lösen, wähle man den Ansatz

$$y(x) = c(x) \cdot \mathrm{e}^{x^2},$$

genannt „Variation der Konstanten". Dann gilt:

$$y'(x) = c'(x) \cdot \mathrm{e}^{x^2} + c(x) \cdot (2x)\mathrm{e}^{x^2}.$$

Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} & y' - 2xy \\ = \;& c'(x) \cdot \mathrm{e}^{x^2} + c(x) \cdot (2x)\mathrm{e}^{x^2} - 2xc(x) \cdot \mathrm{e}^{x^2} \\ = \;& c'(x) \cdot \mathrm{e}^{x^2} \\ \overset{!}{=} \;& 1 - 2x^2. \end{aligned}$$

Beispiel (Fortsetzung)
Übrig bleibt eine Gleichung für die Ableitung von $c(x)$*:*

$$c'(x) = (1 - 2x^2) \cdot \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Durch Integration ergibt sich $c(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$ *und damit als spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung*

$$y(x) = c(x) \cdot \mathrm{e}^{x^2} = x\mathrm{e}^{-x^2} \cdot \mathrm{e}^{x^2} = x.$$

Also lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y(x) = x + c \cdot \mathrm{e}^{x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Übung

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' + y/x = x^2$$

mit „Variation der Konstanten“.

Lösung

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' + y/x = 0$ *erhält man über* $dy/y = -dx/x$, $\ln|y| = -\ln|x| + c$ *und schließlich* $y(x) = c \cdot 1/x$.

Für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist also der Ansatz („Variation der Konstanten")

$$y(x) = c(x) \cdot \frac{1}{x}$$

zu wählen. Für die Ableitung erhält man $y'(x) = c'(x) \cdot 1/x - c(x) \cdot 1/x^2$.

Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung ergibt sich nach Kürzen $c'(x) \cdot 1/x = x^2$ *bzw.* $c'(x) = x^3$ *und durch Integration* $c(x) = x^4/4$.

Lösung (Fortsetzung)

Damit ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gefunden:

$$y(x) = c(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{4}x^3.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = \frac{1}{4}x^3 + c \cdot \frac{1}{x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Lösung der inhom. Dgl. durch „Variation der Konstanten“

Eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung lautet allgemein

$$y' + a_0(x) \cdot y = b(x).$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung löst man durch „Trennung der Veränderlichen“ und erhält Lösungen der Gestalt

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x).$$

Zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung wählt man den Ansatz

$$y(x) = c_1(x) \cdot y_1(x),$$

genannt „Variation der Konstanten“.

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir definieren als Spezialfall der linearen Differentialgleichung:

Definition

Eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Form

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Beispiel

Die Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + y = 3\sin x$$

ist linear mit konstanten Koeffizienten.

Die Differentialgleichung

$$y' - 2xy = 1 - 2x^2$$

ist zwar linear, die Koeffizienten sind aber nicht konstant, da $a_0(x) = -2x$ von x abhängt.

Lösung der homogenen Dgl.

Für die homogene Differentialgleichung ist

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

zu lösen. Der Ansatz mit einer Exponentialfunktion

$$y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$$

liegt nahe. Einsetzen von $y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}$ etc. und Division durch $\mathrm{e}^{\lambda x} > 0$ führt zu

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

der so genannten charakteristischen Gleichung.

Mit anderen Worten: Es sind die *Nullstellen der charakteristischen Gleichung* zu finden, welche wiederum die Exponenten der Exponentialfunktion aus dem Ansatz ergeben.

Beispiel

Für die Differentialgleichung

$$y'' + y' - 6y = 0$$

erhalten wir nach Einsetzen des Ansatzes $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ *die charakteristische Gleichung*

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei reelle Lösungen: $\lambda_1 = 2$ *und* $\lambda_2 = -3$*. Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu*

$$y(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x}.$$

Beispiel
Auch für die Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

erhalten wir nach Einsetzen des Ansatzes $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ *die zugehörige charakteristische Gleichung*

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat allerdings nur eine (doppelte) reelle Nullstelle: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$*. Dies führt zunächst nur auf eine Basislösung der Differentialgleichung, nämlich* $y = \mathrm{e}^{2x}$*. Eine weitere Lösung ist nun*

$$y = x \cdot \mathrm{e}^{2x}$$

(Nachrechnen!). Insgesamt ergibt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu

$$y(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2 \cdot x\mathrm{e}^{2x}.$$

Beispiel
Bei der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

erhalten wir nach Einsetzen des Ansatzes $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ *die charakteristische Gleichung*

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat zwar keine reellen Nullstellen, aber zwei zueinander konjugiert-komplexe Lösungen: $\lambda_{1/2} = 2 \pm 3\mathrm{i}$*. Wir würden also formal die Lösung*

$$y = c_1 \cdot \mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x} + c_2\mathrm{e}^{(2-3\mathrm{i})x}$$

erhalten.

Beispiel (Fortsetzung)

Eine einfache Umformung (Satz von Euler) liefert:

$$\begin{aligned} y &= c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} \\ &= c_1\mathrm{e}^{2x}\left(\cos(3x) + \mathrm{i}\sin(3x)\right) + c_2\mathrm{e}^{2x}\left(\cos(3x) - \mathrm{i}\sin(3x)\right) \\ &= (c_1 + c_2) \cdot \mathrm{e}^{2x}\cos(3x) + \mathrm{i}(c_1 - c_2) \cdot \mathrm{e}^{2x}\sin(3x). \end{aligned}$$

Statt der komplexwertigen Funktionen $\mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x}$ *und* $\mathrm{e}^{(2-3\mathrm{i})x}$ *kann man auch deren Real- und Imaginärteile* $\mathrm{e}^{2x}\cos(3x)$ *und* $\mathrm{e}^{2x}\sin(3x)$ *als (reelle) Lösungen der Differentialgleichung nehmen.*

Insgesamt erhalten wir hier nach Umbenennung der Koeffizienten die reelle Lösung

$$y = c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x}\cos(3x) + c_2 \cdot \mathrm{e}^{2x}\sin(3x).$$

Lösung der homogenen Dgl.

Für die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Form

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

liefert der Ansatz $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. Je nach Lösung dieser quadratischen Gleichung gilt folgende Fallunterscheidung für die Lösung der Differentialgleichung:

$\lambda_1 \neq \lambda_2,$ **beide reell:**
$y = c_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 x},$

$\lambda_1 = \lambda_2,$ **reell:**
$y = c_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot x\, \mathrm{e}^{\lambda_1 x},$

$\lambda_{1/2} = a \pm b\mathrm{i},$ **komplex:**
$y = c_1 \cdot \mathrm{e}^{ax} \cos(bx) + c_2 \cdot \mathrm{e}^{ax} \sin(bx).$

Übung

Lösen Sie die folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

a) $y'' + 8y' + 18y = 0$,

b) $y'' + 2\sqrt{3}y' + 3y = 0$,

c) $2y'' + 20y' + 48y = 0$,

d) $y'' + y = 0$.

Lösung der homogenen Dgl.

a) ***Lösung***

Als Differentialgleichung ist

$$y'' + 8y' + 18y = 0$$

gegeben. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 8\lambda + 18 = 0,$$

die Nullstellen davon sind

$$\lambda_{1/2} = -4 \pm \sqrt{2}\mathrm{i};$$

die Lösung ist also

$$y(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{-4x} \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-4x} \sin(\sqrt{2}x).$$

Lösung der homogenen Dgl.

b) ***Lösung***
Als Differentialgleichung ist

$$y'' + 2\sqrt{3}y' + 3y = 0$$

gegeben. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 2\sqrt{3}\lambda + 3 = 0,$$

die Nullstellen davon sind

$$\lambda_{1/2} = -\sqrt{3};$$

die Lösung ist also

$$y(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{-\sqrt{3}x} + c_2 \cdot x\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x}.$$

Lösung der homogenen Dgl.

c) ***Lösung***

Als Differentialgleichung ist

$$2y'' + 20y' + 48y = 0$$

gegeben. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 10\lambda + 24 = 0,$$

die Nullstellen davon sind

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -6;$$

die Lösung ist also

$$y(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{-4x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-6x}.$$

Lösung der homogenen Dgl.

d) ***Lösung***

Als Differentialgleichung ist

$$y'' + y = 0$$

gegeben. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

die Nullstellen davon sind

$$\lambda_{1/2} = \pm\mathrm{i};$$

die Lösung ist also

$$y(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x.$$

Lösung der inhomogenen Dgl. durch „Ansatz vom Typ der rechten Seite“

Zur Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung kann man in vielen Fällen einen so genannten „Ansatz vom Typ der rechten Seite“ wählen.

Gemeint ist damit das Folgende: **Man geht davon aus, dass die Lösung die gleiche Gestalt wie die Störfunktion haben wird.**

Ist z.B. die Störfunktion ein Polynom, so nimmt man an, dass die Lösung auch ein Polynom sein wird, wenn auch i.Allg. mit anderen Koeffizienten. Ein „Ansatz vom Typ der rechten Seite“ ist bei Funktionen bzw. Produkten von Funktionen wie Exponentialfunktion, Sinus oder Cosinus und bei Polynomen sinnvoll. Derartige Ansätze können gewählt werden, weil die Ableitungen von Exponentialfunktion, Sinus oder Cosinus und Polynomen wiederum Exponentialfunktion, Sinus oder Cosinus und Polynome sind.

Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + y' - 6y = 3\mathrm{e}^{-4x}.$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung hatten wir zu

$$y(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x}$$

ermittelt.

Zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung verwenden wir einen „Ansatz vom Typ der rechten Seite“, gehen also davon aus, dass auch die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung eine e^{-4x}*-Funktion ist, wenngleich mit evtl. anderem Koeffizienten* K*:*

$$y(x) = K \cdot \mathrm{e}^{-4x}.$$

Beispiel (Fortsetzung)
Für die Ableitungen des Ansatzes $y(x) = K \cdot \mathrm{e}^{-4x}$ *erhalten wir* $y'(x) = -4K \cdot \mathrm{e}^{-4x}$ *und* $y''(x) = 16K \cdot \mathrm{e}^{-4x}$*. Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung ergibt sich:*

$$\begin{aligned} & y'' + y' - 6y \\ = \; & 16K \cdot \mathrm{e}^{-4x} - 4K \cdot \mathrm{e}^{-4x} - 6K \cdot \mathrm{e}^{-4x} \\ = \; & 6K \cdot \mathrm{e}^{-4x} \stackrel{!}{=} 3 \cdot \mathrm{e}^{-4x}. \end{aligned}$$

Also $6K = 3$ *bzw.* $K = 1/2$*. Damit ist*

$$y = 1/2 \cdot \mathrm{e}^{-4x}$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y'' + y' - 6y = 3\mathrm{e}^{-4x}$*; und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet:*

$$y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x} + c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Übung

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' + y' - 6y = 50 \sin x.$$

Wählen Sie dabei zur Ermittlung einer speziellen Lösung den „Ansatz vom Typ der rechten Seite“:

$$y(x) = K_1 \sin x + K_2 \cos x.$$

Lösung

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung ist wiederum $y(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x}$.

Mit der Ansatzwahl

$$y(x) = K_1 \sin x + K_2 \cos x$$

erhalten wir die Ableitungen $y'(x) = K_1 \cos x - K_2 \sin x$ *sowie* $y''(x) = -K_1 \sin x - K_2 \cos x$.

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} & -K_1 \sin x - K_2 \cos x + K_1 \cos x - K_2 \sin x \\ & -6(K_1 \sin x + K_2 \cos x) \\ = \; & (-7K_1 - K_2) \sin x + (K_1 - 7K_2) \cos x \\ \stackrel{!}{=} \; & 50 \sin x. \end{aligned}$$

Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$-7K_1 - K_2 = 50, \quad K_1 - 7K_2 = 0$$

mit den Lösungen $K_1 = -7$ *und* $K_2 = -1$. *Aus unserem Ansatz ergibt sich somit als spezielle Lösung*

$$y(x) = -7 \sin x - \cos x.$$

Lösung (Fortsetzung)
Die Lösung der homogenen Differentialgleichung war

$$y(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x}.$$

Aus unserem Ansatz $y(x) = K_1 \sin x + K_2 \cos x$ *ergab sich als spezielle Lösung*

$$y(x) = -7 \sin x - \cos x.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet damit:

$$y(x) = -7 \sin x - \cos x + c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x},$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Lösung der inhomogenen Dgl.

Ein Problem ergibt sich nun noch, wenn als Störfunktion eine Lösung der homogenen Differentialgleichung erscheint:

Beispiel
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + y' - 6y = 10\mathrm{e}^{2x}.$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung hatten wir zu $y(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x}$ *ermittelt.*

Der „Ansatz vom Typ der rechten Seite“

$$y(x) = K \cdot \mathrm{e}^{2x}$$

führt nicht weiter, da dieser Ansatz eingesetzt in die homogene Differentialgleichung 0 *ergeben muss (aber nicht* $10\mathrm{e}^{2x}$*), schließlich ist* e^{2x} *ja Lösung der homogenen Differentialgleichung.*

Beispiel (Fortsetzung)

Für $y'' + y' - 6y = 10\mathrm{e}^{2x}$ führt nun der Ansatz

$$y(x) = K \cdot x\, \mathrm{e}^{2x}$$

zum Ziel. Die Ableitungen unseres Ansatzes ergeben sich zu $y'(x) = K\mathrm{e}^{2x} + 2Kx\mathrm{e}^{2x}$ und $y''(x) = 4K\mathrm{e}^{2x} + 4Kx\mathrm{e}^{2x}$. Einsetzen führt auf

$$\begin{aligned} & y'' + y' - 6y \\ = \; & 4K\mathrm{e}^{2x} + 4Kx\mathrm{e}^{2x} + K\mathrm{e}^{2x} + 2Kx\mathrm{e}^{2x} - 6Kx\mathrm{e}^{2x} \\ = \; & 5K\mathrm{e}^{2x} \stackrel{!}{=} 10\mathrm{e}^{2x}. \end{aligned}$$

(Hier müssen sich gerade die Terme aus der homogenen Lösung wegheben!)

Also muss $5K = 10$ und somit $K = 2$ gelten. Der Ansatz führte also auf die Lösung:

$$y(x) = Kx\mathrm{e}^{2x} = 2x\mathrm{e}^{2x}.$$

Insgesamt:

$$y(x) = 2x\mathrm{e}^{2x} + c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Übung

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' + y = 4 \sin x.$$

Wählen Sie den „Ansatz vom Typ der rechten Seite“:

$$y(x) = x \cdot (K_1 \sin x + K_2 \cos x).$$

Lösung

Zur homogenen Differentialgleichung $y'' + y = 0$ *gehört das charakteristische Polynom* $\lambda^2 + 1 = 0$*, die Nullstellen* $\lambda_{1/2} = \pm\mathrm{i}$ *und damit die allgemeine Lösung* $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$*.*

Für die inhomogene Differentialgleichung ist der Ansatz

$$y(x) = K_1 x \sin x + K_2 x \cos x$$

zu wählen. Für die erste bzw. zweite Ableitung erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} y'(x) &= K_1 \sin x + K_1 x \cos x + K_2 \cos x - K_2 x \sin x, \\ y''(x) &= 2K_1 \cos x - K_1 x \sin x - 2K_2 \sin x - K_2 x \cos x. \end{aligned}$$

Lösung (Fortsetzung)

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} & 2K_1 \cos x - K_1 x \sin x - 2K_2 \sin x - K_2 x \cos x \\ & + K_1 x \sin x + K_2 x \cos x \\ = \; & 2K_1 \cos x - 2K_2 \sin x \\ \stackrel{!}{=} \; & 4 \sin x. \end{aligned}$$

Also $2K_1 = 0$, $-2K_2 = 4$ *und damit* $K_1 = 0$, $K_2 = -2$ *und als spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung* $y(x) = -2x \cos x$.

Insgesamt:

$$y(x) = -2x \cos x + c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Lösung der inhomogenen Dgl.

Zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten kann man in vielen Fällen einen „Ansatz vom Typ der rechten Seite“ wählen. Man geht dabei davon aus, dass sich Störfunktion und Lösung ähneln:

Störfunktion	Ansatz für Lösung der Dgl.
Polynom	Polynom
$k\mathrm{e}^{ax}$	$K\mathrm{e}^{ax}$
$k\sin(bx)$	$K_1\sin(bx) + K_2\cos(bx)$
$k\cos(bx)$	$K_1\sin(bx) + K_2\cos(bx)$

Im „Resonanzfall“, d.h. wenn die Störfunktion bereits Lösung der *homogenen* Differentialgleichung ist, muss der jeweilige Ansatz mit x (oder einer Potenz von x) multipliziert werden.

Superpositionsprinzip

Wichtig — insbesondere in den technisch-physikalischen Anwendungen — ist das so genannte *Superpositionsprinzip*. Dabei geht es, wie im Physikunterricht, um die Überlagerung von Kräften bzw. von Störfunktionen.

Beispiel

Die Differentialgleichung $y'' + y' - 6y = 50\sin x$ *hat die spezielle Lösung*

$$y(x) = -7\sin x - \cos x,$$

die Differentialgleichung $y'' + y' - 6y = 10e^{2x}$ *hat die spezielle Lösung*

$$y(x) = 2xe^{2x}.$$

Wenn nun bei der Differentialgleichung

$$y'' + y' - 6y = 50\sin x + 10e^{2x} \qquad (*)$$

beide *Störfunktionen additiv vorliegen, so addieren sich auch die speziellen Lösungen der jeweiligen inhomogenen Differentialgleichung. Eine spezielle Lösung von* $(*)$ *ist also:*

$$y(x) = \underbrace{-7\sin x - \cos x + 2xe^{2x}}_{\textit{spez.Lsg.inhom.Dgl.}} + \underbrace{c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-3x}}_{\textit{allg.Lsg.hom.Dgl.}}.$$

Superpositionsprinzip

Ist $y_1(x)$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b_1(x)$$

und $y_2(x)$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b_2(x),$$

dann ist $y_1(x) + y_2(x)$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b_1(x) + b_2(x).$$

Superpositionsprinzip

Das Superpositionsprinzip gilt sogar allgemein bei *linearen* Differentialgleichungen.

Die gesamten obigen Überlegungen (homogene Differentialgleichung: Ansatz $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, charakteristische Gleichung ist zu lösen; inhomogene Differentialgleichung: Superpositionsprinzip und in vielen Fällen „Ansatz vom Typ der rechten Seite") gelten analog auch für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten *höherer Ordnung*:

Differentialgleichungen höherer Ordnung

Beispiel

Die Differentialgleichung 3. Ordnung

$$y''' + y'' - 8y' - 12y = 0$$

führt mit dem Ansatz $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ *auf die charakteristische Gleichung*

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 8\lambda - 12 = (\lambda + 2)^2 \cdot (\lambda - 3)$$

mit den drei Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet damit

$$y(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \cdot x\mathrm{e}^{-2x} + c_3 \cdot \mathrm{e}^{3x}.$$

Übung

Wie lauten die Ansätze vom Typ der rechten Seite zur Differentialgleichung $y''' + y'' - 8y' - 12y = b(x)$ *bei Wahl der folgenden rechten Seiten:*

a) $b(x) = 3x^2 - 5$,
b) $b(x) = 5\sin(3x)$,
c) $b(x) = -6e^{-3x}$,
d) $b(x) = -\sqrt{7}e^{3x}$,
e) $b(x) = -3/4 \cdot e^{-2x}$,
f) $b(x) = 5\sin(3x) - 3/4 \cdot e^{-2x}$.

(Die Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet $y(x) = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot x e^{-2x} + c_3 \cdot e^{3x}$*.)*

Lösung

a) $y(x) = K_2 x^2 + K_1 x + K_0$,
b) $y(x) = K_1 \sin(3x) + K_2 \cos(3x)$,
c) $y(x) = K \cdot e^{-3x}$,
d) $y(x) = K \cdot x e^{3x}$,
e) $y(x) = K \cdot x^2 e^{-2x}$,
f) $y(x) = K_1 \sin(3x) + K_2 \cos(3x) + K_3 \cdot x^2 e^{-2x}$.

Wachstum

Unter Wachstum wird *jede* zeitliche Änderung einer Größe verstanden: Es gibt also auch Nullwachstum oder gar negatives Wachstum.

Wir wollen nun hier verschiedene mathematische Modelle für Wachstumsvorgänge wie lineares, exponentielles, hyperbolisches, beschränktes und logistisches Wachstum unterscheiden und uns fragen, welchen Prozessen ein derartiges Wachstumsverhalten zugrunde liegt.

Dabei soll im Folgenden immer eine Größe $y(t)$, ein vorliegender Bestand, beschrieben werden, der sich in der Zeit t verändert.

Lineares Wachstum

Man sagt, dass *lineares Wachstum* vorliegt, wenn die Zu- bzw. Abnahme von y pro Zeiteinheit *konstant* ist. Mathematisch ausgedrückt gilt also:

$$\dot{y} = k$$

mit einer Konstanten k. Mit „Trennung der Veränderlichen“ lässt sich die zugehörige Wachstumsfunktion ermitteln: Wegen $dy = k\,dt$ folgt nach Integration $y = k \cdot t + c$, wobei die Integrationskonstante c gleich dem ursprünglichen Bestand zur Zeit $t = 0$ ist, nämlich $c = y(0)$. Demzufolge wird lineares Wachstum durch folgendes mathematisches Modell beschrieben:

$$y(t) = k \cdot t + y(0).$$

Lineares Wachstum (Fortsetzung)

Derartige lineare Wachstumsprozesse erleben wir z.B. beim Vollbad in der heimischen Badewanne: Hier steht $y(t)$ für die Füllmenge Wasser in Abhängigkeit von der Zeit t, und der Proportionalitätsfaktor k ist positiv, falls wir Wasser einlaufen lassen.

Exponentielles Wachstum

Eine andere Art von Wachstumsprozess beschreibt *exponentielles Wachstum*. Hier ist die Zu- bzw. Abnahme von y pro Zeiteinheit t, also die Veränderungsrate $\dot{y}$, proportional zum vorliegenden Bestand y — in Formeln ausgedrückt:

$$\dot{y} = k \cdot y.$$

Wiederum kann man mittels „Trennung der Veränderlichen“ das Wachstumsgesetz ermitteln und erhält eine Exponentialfunktion:

$$y(t) = y(0) \cdot \mathrm{e}^{kt}.$$

Exponentielles Wachstum (Fortsetzung)

Auch exponentielles Wachstum ist ein alltägliches Phänomen: Wir denken an Kapitalzuwachs durch Verzinsung (Zinseszins-Effekt) oder an radioaktiven Zerfall (hier mit negativem Proportionalitätsfaktor k).

Hyperbolisches Wachstum

Beim *hyperbolischen Wachstum* schließlich ist die Veränderungsrate $\dot{y}$ sogar proportional zum *Quadrat* des vorliegenden Bestandes y^2, d.h.

$$\dot{y} = k \cdot y^2.$$

Auch diese Differentialgleichung ist mittels „Trennung der Veränderlichen“ zu lösen: Es ist $dy/y^2 = kdt$ und durch Integration ergibt sich $-1/y = kt + c$ bzw. $y = 1/(-kt - c)$. Mit der Anfangsbedingung $y(0) = -1/c$ erhält man schließlich

$$y(t) = \frac{y(0)}{1 - k \cdot y(0) \cdot t}.$$

Damit ist ein äußerst explosives Wachstum beschrieben: Wir denken an explosive chemische Reaktionen, an die Bevölkerungsexplosion, an die Wissens- und Informationsexplosion, an die Publikationsflut, der wir ausgesetzt sind.

Hyperbolisches Wachstum (Fortsetzung)

Man nennt das hyperbolische Wachstumsmodell

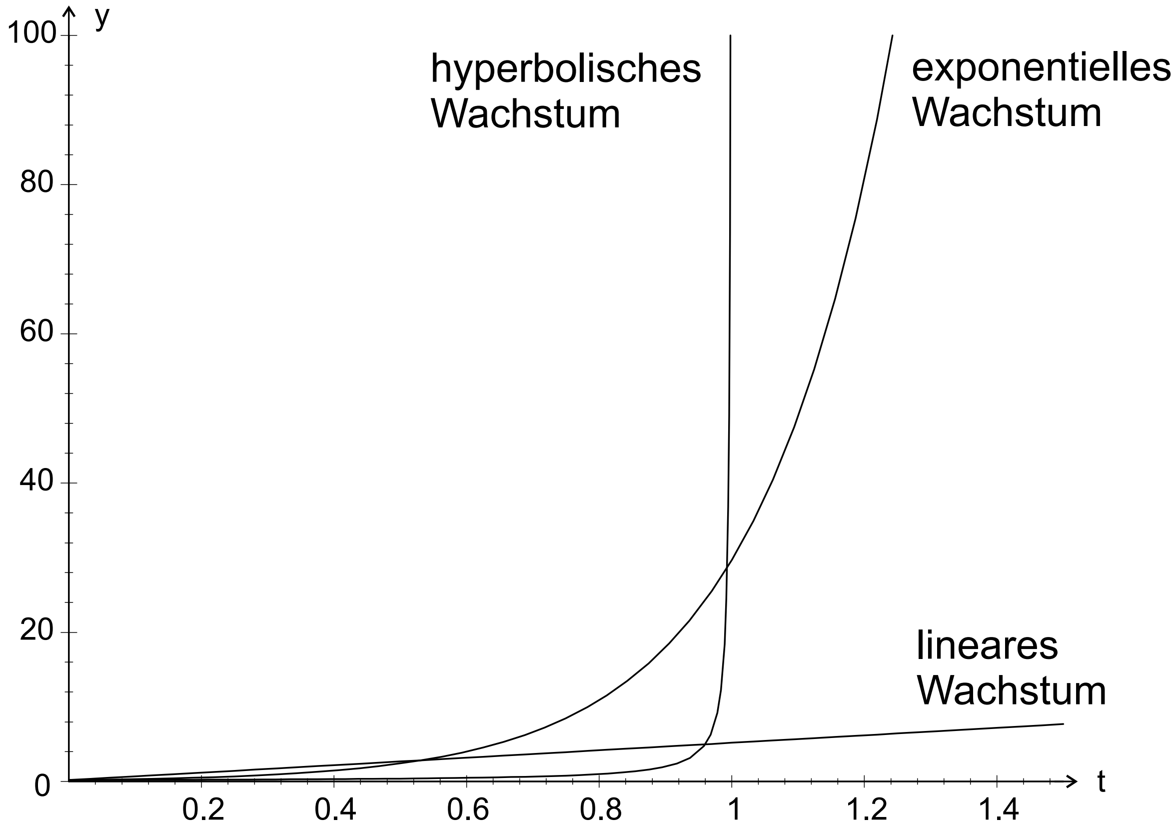
$$y(t) = \frac{y(0)}{1 - k \cdot y(0) \cdot t}$$

oft *doomsday-Modell* vom englischen Wort „doomsday“ für den „Jüngsten Tag“. In der Tat hat hyperbolisches Wachstum einen apokalyptischen Anstrich, $y(t)$ „explodiert ins Unendliche“ am „Jüngsten Tag“

$$t_{\text{Ende}} = 1/(k \cdot y(0)),$$

wenn mathematisch gesehen der Nenner der Wachstumsfunktion $y(t)$ gleich Null wird.

Lineares, exponentielles und hyperbolisches Wachstum



Beschränktes Wachstum

Wachstumsvorgänge mit natürlicher Grenze werden *beschränktes Wachstum* genannt. Man geht hierbei davon aus, dass die Änderungsrate der Größe $y(t)$ (also $\dot{y}$) proportional zur Abweichung von einer Kapazitätsgrenze G ist. Wir erhalten dann als Differentialgleichung für beschränktes Wachstum:

$$\dot{y} = k \cdot (G - y).$$

Wiederum führt „Trennung der Veränderlichen“ auf die zugehörige Differentialgleichung:

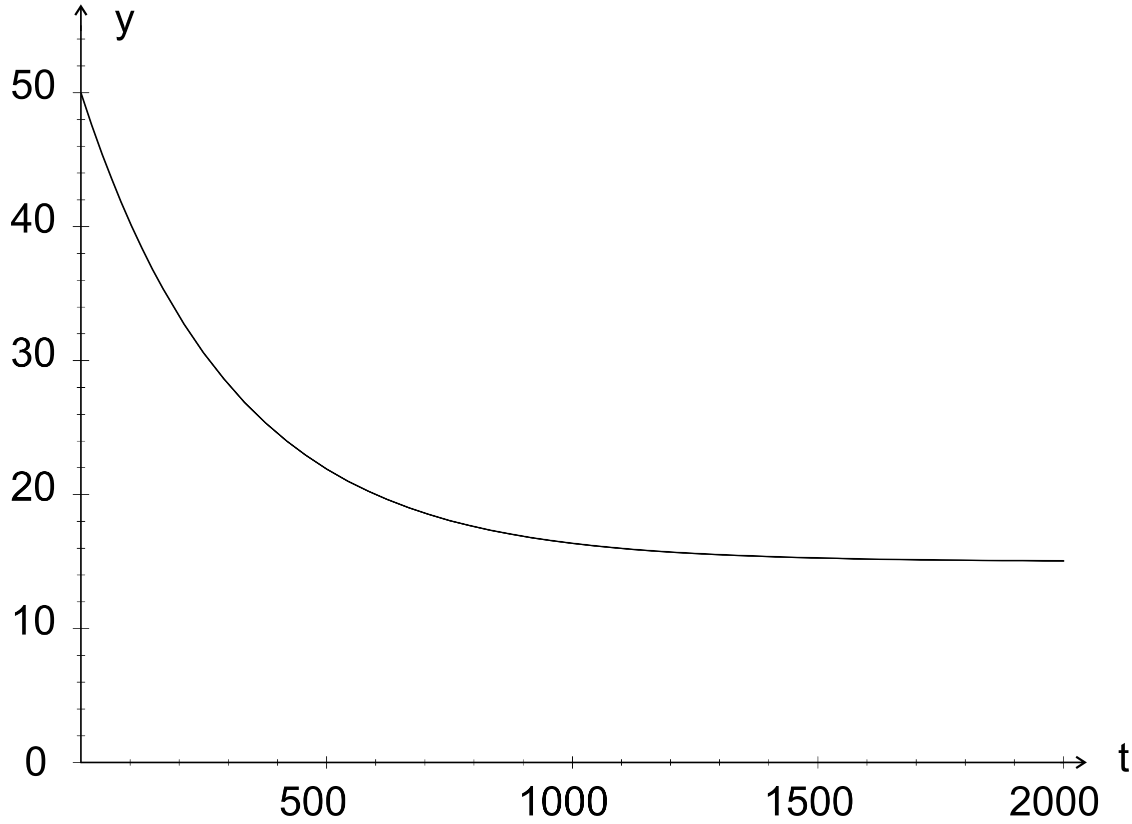
$$y(t) = G + (y(0) - G) \cdot \mathrm{e}^{-kt}.$$

Beschränktes Wachstum (Fortsetzung)

Mit einem derartigen Wachstumsmodell lässt sich etwa der Absatz von neuen Produkten oder die Ausbreitung von Gerüchten oder Krankheiten beschreiben: Hier gibt es jeweils eine Sättigungsgrenze G, etwa wenn jeder einen elektrischen Dosenöffner besitzt oder wenn jeder über das Gerücht informiert ist bzw. erkrankt ist.

Ein anderes Beispiel ist die Abkühlung des Cappuccino vor Ihnen in der Tasse auf Raumtemperatur; in diesem Fall ist $y(0)$ die heiße Ausgangstemperatur und G die Raumtemperatur, auf die der Cappuccino abkühlt.

Beschränktes Wachstum



Logistisches Wachstum

Ein anderes Wachstumsmodell, welches auf den belgischen Sozialstatistiker Verhulst (1804-1846) zurückgeht. Hier ist die Änderungsrate $\dot{y}$ proportional sowohl zum Bestand y als auch zum Freiraum $G - y$, der Differenz zur Wachstumsgrenze G also. Die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$\dot{y} = k \cdot y \cdot (G - y).$$

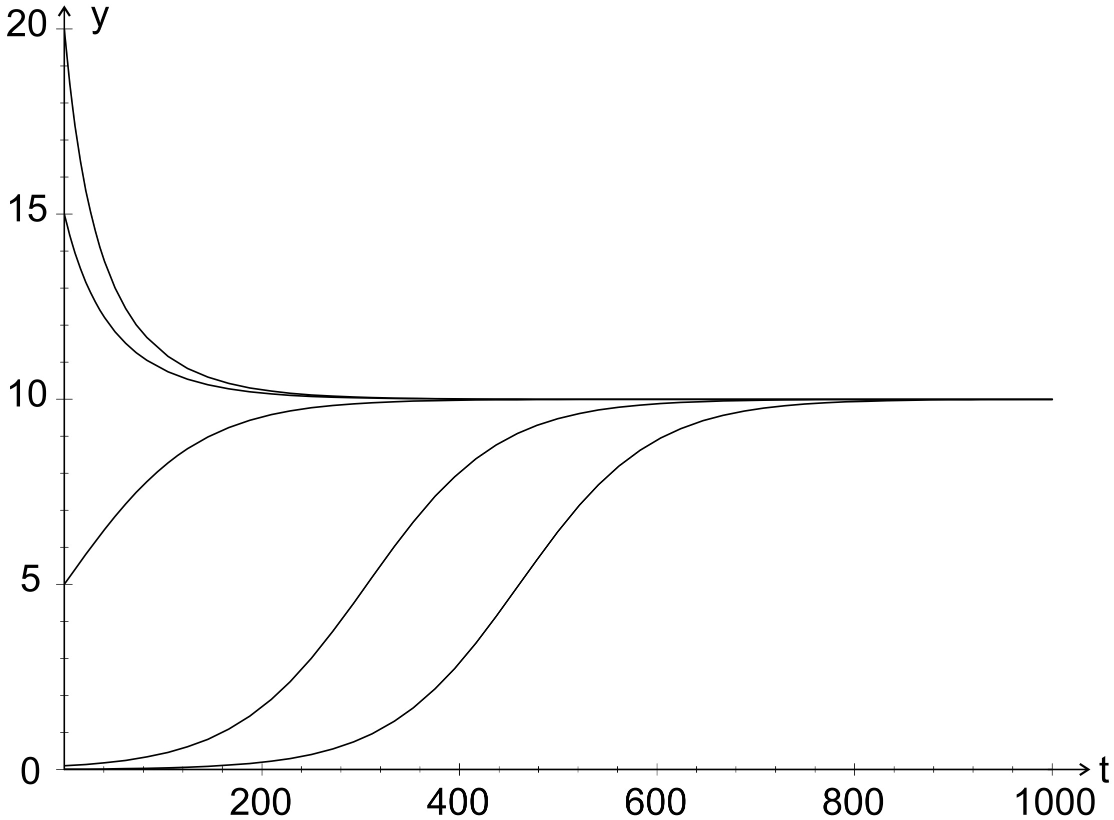
Wiederum hilft „Trennung der Veränderlichen“ bei der Lösung der Differentialgleichung:

$$y(t) = \frac{y(0) \cdot G}{y(0) + (G - y(0)) \cdot \mathrm{e}^{-Gkt}}.$$

Logistisches Wachstum (Fortsetzung)

Genauso wie das beschränkte Wachstum beschreibt auch das logistische Wachstum einen Prozess, der auf eine Sättigung zusteuert. Allerdings galt beim beschränkten Wachstum eine gebremste Zu- oder Abnahme *von Anfang an*, während beim logistischen Wachstum der Sättigungseffekt jedoch erst nach einiger Zeit eintritt: Beim logistischen Wachstum kann die Funktion $y(t)$ eine S-Form haben, weil die zweite Ableitung von $y(t)$, die Krümmung, ihr Vorzeichen ändern kann (falls $y(0) < G$).

Logistisches Wachstum



Modellierung mit verschiedenen mathematischen Ansätzen

Wachstumsprozesse können mit ganz verschiedenen mathematischen Ansätzen *modelliert* werden: So vermochte man etwa die Bevölkerungsentwicklung zwischen 1700 und 1950 noch durch exponentielles Wachstum beschreiben (bei Verdoppelung der Weltbevölkerung alle 34.67 Jahre), nach 1950 wurden andere Modelle wie logistisches Wachstum benötigt, die verschieden gut auf die vorliegenden Zahlen passen.

Wachstumsmodelle

Modell	Dgl.	Funktion
lineares Wachstum	$\dot{y} = k$	$y(t) = kt + y(0)$
exponent. Wachstum	$\dot{y} = k \cdot y$	$y(t) = y(0) \cdot \mathrm{e}^{kt}$
hyperbol. Wachstum	$\dot{y} = k \cdot y^2$	$y(t) = \frac{y(0)}{1-ky(0)\cdot t}$
beschr. Wachstum	$\dot{y} = k \cdot (G - y)$	$y(t) = G + (y(0) - G) \cdot \mathrm{e}^{-kt}$
logist. Wachstum	$\dot{y} = k \cdot y(G - y)$	$y(t) = \frac{y(0)\cdot G}{y(0)+(G-y(0))\cdot \mathrm{e}^{-Gkt}}$

Harmonischer Oszillator

Wir wenden uns im Folgenden nochmals dem linearen Federpendel (auch harmonischer Oszillator genannt) zu mit der Differentialgleichung:

$$\underbrace{m\,\ddot{x}}_{\text{Newtonscher Bewegungsterm}} + \underbrace{d\,\dot{x}}_{\text{Dämpfungs-term}} + \underbrace{D\,x}_{\text{rücktreibende Kraft}} = \underbrace{F(t).}_{\text{äußere Kraft}}$$

Zur Normierung wollen wir diese Gleichung noch durch m dividieren, außerdem werden Abkürzungen eingeführt:

$$\ddot{x} + 2\alpha\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = f(t)$$

(wobei $2\alpha = d/m > 0$, $\omega_0^2 = D/m > 0$, $f(t) = F(t)/m$).

Es liegt eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vor, die mit den erarbeiteten Methoden relativ einfach zu lösen ist.

Lösung der homogenen Dgl.

Zur Lösung der *homogenen Differentialgleichung* führt der Ansatz $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ auf die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$ mit den Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

Abhängig von der Größe der Konstanten (Masse m, Dämpfungsfaktor d, Federkonstante D bzw. daraus resultierend α und ω_0) kann man die folgenden drei Fälle unterscheiden:

1.) $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$	starke Dämpfung	zwei reelle Nullstellen,
2.) $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$	aperiodischer Grenzfall	eine reelle Nullstelle,
3.) $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$	schwache Dämpfung	zwei komplexe Nullstellen.

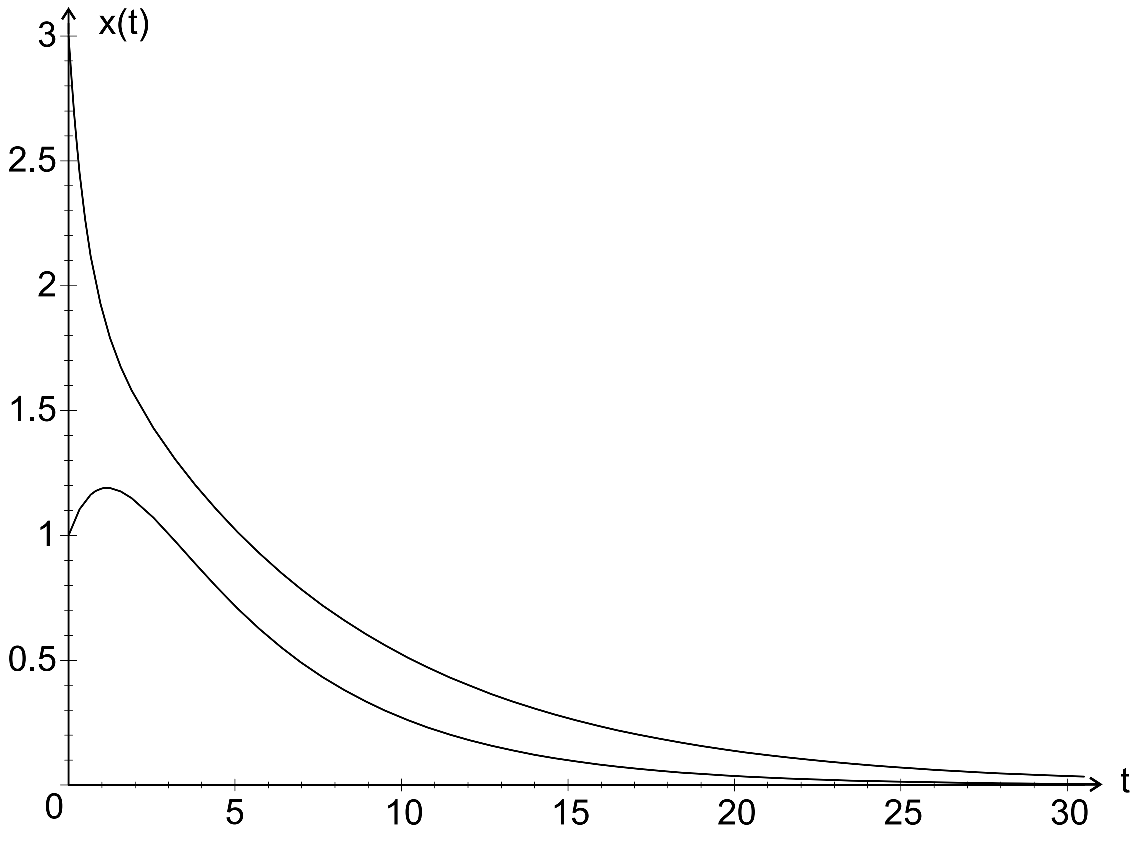
Starke Dämpfung

In diesem Fall ist α bzw. die Dämpfungskonstante d recht groß, so dass allgemein von starker Dämpfung gesprochen wird. Es liegen zwei verschiedene reelle Nullstellen λ_1 und λ_2 vor, die *beide negativ* sind (wegen $0 < \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha$). Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung besteht daher aus einer Linearkombination von *abklingenden* Exponentialfunktionen:

$$x(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})\, t} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})\, t}.$$

Bei starker Dämpfung treten also keine Schwingungen auf; man spricht vom *aperiodischen Fall*.

Beispiele für aperiodischen Fall und Grenzfall



Aperiodischer Grenzfall

Im Grenzfall $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$ bzw. $\alpha = \omega_0$ liegt eine (doppelt auftretende) reelle Nullstelle $\lambda_{1/2} = -\alpha$ vor. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet:

$$x(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha\, t} + c_2 \cdot t\mathrm{e}^{-\alpha\, t}.$$

Man spricht vom *aperiodischen Grenzfall*, der dem aperiodischen Fall ähnelt, da auch hier keine Oszillationen auftreten und die Schwingung abklingt.

Schwache Dämpfung

Interessant ist der Fall der schwachen Dämpfung $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$, wo mathematisch gesprochen zwei zueinander konjugiert komplexe Nullstellen $\lambda_{1/2}$ der charakteristischen Gleichung auftreten. Mit $\omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ gilt $\lambda_{1/2} = -\alpha \pm \mathrm{i}\,\omega_1$ und wir erhalten als Lösung der homogenen Differentialgleichung:

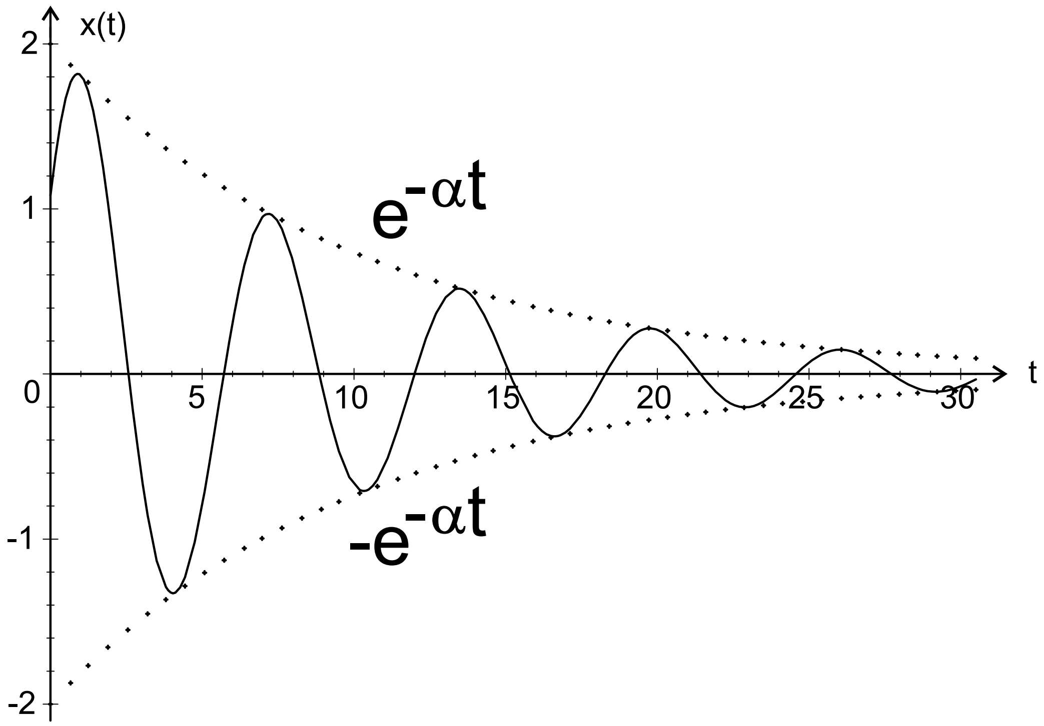
$$x(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha\, t} \cos(\omega_1\, t) + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha\, t} \sin(\omega_1\, t).$$

Man kann nun die Überlagerung solcher gleichfrequenter harmonischer Schwingungen (nach einigen mathematischen Umformungen) auch durch die resultierende Schwingung derselben Frequenz ω_1 beschreiben:

$$x(t) = C \cdot \mathrm{e}^{-\alpha\, t} \cos(\omega_1\, t - \phi).$$

Insgesamt liegt eine *gedämpfte Schwingung* vor.

Beispiel für gedämpfte Schwingung



Lösung der inhomogenen Dgl.

In allen drei Fällen (bei Vorliegen eines Dämpfungsterms $d > 0$) gilt, dass die allgemeine Lösung $x(t)$ der homogenen Differentialgleichung mit wachsendem t abklingt, d.h.

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Dies wiederum bedeutet, dass nach einiger Zeit nur mehr die Lösung der *inhomogenen Differentialgleichung* das Verhalten des Federpendels bestimmen wird.

Lösung der inhomogenen Dgl.

Wir wollen nun eine spezielle Lösung der *inhomogenen Differentialgleichung* bei Vorliegen einer harmonischen Anregung

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega t)$$

ermitteln. Hier kann man einen „Ansatz vom Typ der rechten Seite“ der Form

$$x(t) = K_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t)$$

verwenden. Nach (umfangreicher) Umformung der gleichfrequenten Schwingungen in die resultierende Schwingung erhält man die spezielle Lösung

$$x(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \cdot \cos(\omega\, t - \delta)$$

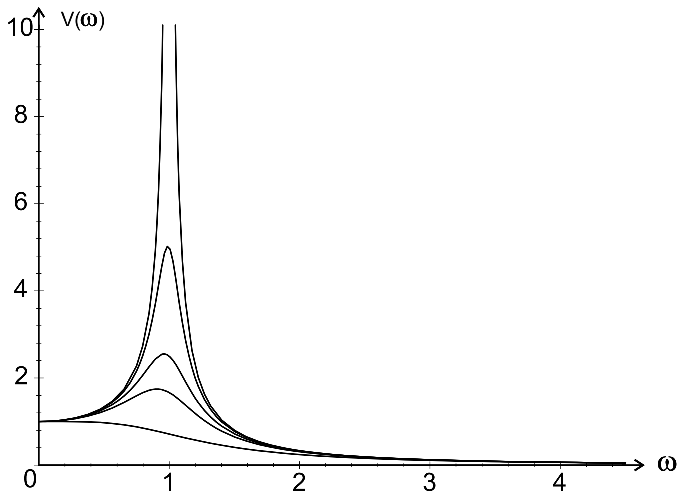
mit einer Phasenverschiebung $\delta = \delta(\omega)$, die frequenzabhängig ist.

Lösung der inhomogenen Dgl.
Verstärkungsfaktor

Wenn man das Verhältnis der Amplituden von $x(t)$ und $f(t)$ als Verstärkungsfaktor $V(\omega)$ bezeichnet:

$$V(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}},$$

so zeigt sich, dass $V(\omega)$ für bestimmte ω maximal wird, nämlich bei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$ (vgl. Abb. **??**). Oft ist ein derartiges Anwachsen der Amplitude unerwünscht — man spricht von Resonanz bzw. von *Resonanzkatastrophe* (beim Einsturz von Brücken, Bruch eines Tragflügels, Klappern von Armaturen im Auto).



Elektrische Schwingkreise

Die obigen Überlegungen gelten übrigens ganz analog für die Serienschaltung eines Ohm'schen Widerstandes R, einer Induktivität (Spule) L und einer Kapazität (Kondensator) C. Auch hier lässt sich die Stromstärke durch eine Differentialgleichung der Form

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

beschreiben.