Kapitel 7

Reihen

- Konvergenz unendlicher Reihen
- Konvergenzkriterien
- Potenzreihen und Taylorreihen
- Anwendungen

Konvergenz unendlicher Reihen

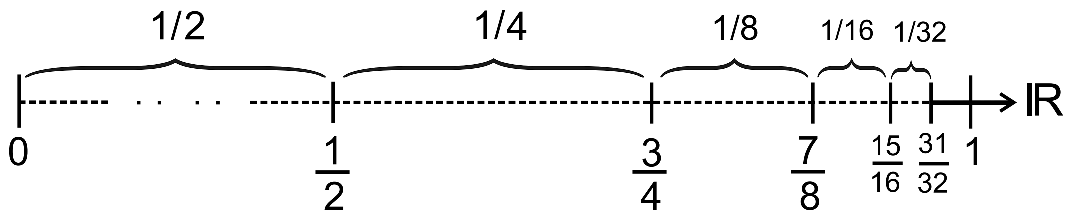
Betrachtet man die „unendliche Reihe“

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots,$$

so stellt man fest, dass jeder Summand stets um die Hälfte kleiner ist als sein Vorgänger.

Die auf der Zahlengeraden hinzukommenden Stücke werden also immer kleiner, bis sie wegen ihrer „Winzigkeit“ nicht mehr sichtbar sind.

Je länger man den Additionsvorgang fortsetzt, desto näher kommt man der Eins, sie wird aber in der Summe nie übersprungen werden.



Untersuchung einer Reihe

Untersuchen wir andererseits die Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots,$$

so gilt

- Glieder 1 bis 2 der Reihe: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$,
- Glieder 3 bis 6 der Reihe: $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$,

usw. Eine bestimmte Anzahl von Summanden, die wir *Teilsumme* nennen wollen, ergibt stets einen Summenwert größer als $1/2$:

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{7}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{15}}_{>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{31}}_{>16\cdot\frac{1}{32}=\frac{1}{2}}+\frac{1}{32}+\dots$$

Die Summe wird also „unendlich groß“, obwohl — wie im ersten Beispiel — die einzelnen Summanden auch hier immer kleiner werden.

Unendliche Reihe, Partialsumme

Definition

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = a_0, a_1, a_2, \cdots$ eine Zahlenfolge, dann heißt die durch die Vorschrift

$$s_n := \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1},$$

$n \in \mathbb{N}_+$, neu gebildete Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ (die aus (a_n) gebildete) unendliche Reihe. Statt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ schreibt man

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Die Glieder s_n dieser Folge werden Partialsummen genannt.

Man beachte, dass die n-te Partialsumme gemäß unserer Definition stets aus n Summanden besteht:

$$s_1 = a_0,\ s_2 = a_0 + a_1,\ s_3 = a_0 + a_1 + a_2,$$

usw.

Beispiel

Der Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

liegt die Folge

$$\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

zugrunde.

Die Partialsummen ergeben sich zu

$$s_n = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Anstelle der „Grenzwertnotation“

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n - 1}{2^n}$$

schreibt man

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Übung

Durch welche Folge wird die Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

definiert?

Lösung

Die unendliche Reihe wird durch die Folge

$$\left(\frac{1}{n+2}\right)_{n\in I\!N}$$

definiert. Man kann sie in der Form

$$(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+2})_{n\in I\!N_+}$$

schreiben.

Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen

Definition

Eine unendliche Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ heißt konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergent ist, d.h. wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = s$$

gilt. Der Grenzwert s heißt Summe oder Summenwert der unendlichen Reihe. Existiert s nicht, so nennt man die Reihe divergent.

Eigentlich steht das Symbol

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

für die Summe einer konvergenten Reihe. Man benutzt es aber auch zur Bezeichnung der (nicht notwendigerweise konvergenten) Folge von Partialsummen $(s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k)_{n\in\mathbb{N}_+}$ selbst.

Beispiel

a) *Zu untersuchen ist, ob die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ *konvergent ist. Für die Folge der Partialsummen erhält man*

$$s_1 = (-1)^0 = 1, \; s_2 = s_1 + (-1)^1 = 0,$$

$$s_3 = s_2 + (-1)^2 = 1,$$

usw., d.h. diese ist alternierend: $1, 0, 1, 0, \ldots$ *Daher divergiert die Reihe.*

b) *Die sog.* harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ *stimmt bis auf den ersten Summanden mit der Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2}$ *überein. Letztere wird unendlich groß, was wir bereits festgestellt haben.*

Dies trifft natürlich auch für die harmonische Reihe zu. Man sagt, sie ist divergent *gegen* ∞ *und schreibt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty.$$

Übung

Bestimmen Sie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Lösung

Man erhält

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

Unendliche geometrische Reihe

Wir kennen endliche geometrische Reihen der Form

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_0 q^i = a_0 \sum_{i=0}^{n-1} q^i.$$

Jetzt können wir die Konvergenz der *unendlichen geometrischen Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ untersuchen: Dazu betrachten wir die Partialsummen

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}.$$

Für $q = 1$ ist $s_n = n$. Wegen $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ hat man bestimmte Divergenz mit dem uneigentlichen Grenzwert ∞.

Für $q \neq 1$ ergibt sich aus der Formel für die endliche geometrische Reihe $s_n = \frac{q^n-1}{q-1}$. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{\lim_{n\to\infty} q^n - 1}{q - 1}.$$

Für $|q| < 1$ konvergiert die Reihe mit dem Summenwert $\frac{1}{1-q}$, da bekanntlich $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Für $|q| > 1$ hat man wegen $\lim_{n\to\infty} q^n = \pm\infty$ Divergenz.

Unendliche geometrische Reihe

Zusammenfassend halten wir fest:

Falls $|q| < 1$, dann gilt für die geometrische Reihe

$$\begin{aligned} a_0(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} q^k \\ &= a_0 \frac{1}{1-q}. \end{aligned}$$

In allen anderen Fällen liegt Divergenz vor.

Beispiel

Die bereits bekannte Reihe

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}_+}$$

ist natürlich eine geometrische Reihe mit $a_0 = 1/2$ *und dem konstanten Quotienten* $q = 1/2$.

Es ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = 1. \end{aligned}$$

Übung

Berechnen Sie die Summe der geom. Reihe

$$1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \dots$$

Lösung

Für diese geometrische Reihe gilt

$$a_0 = 1 \quad \textit{und} \quad q = -3/4.$$

Obige Formel liefert somit

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{3}{4})^k &= \frac{1}{1-(-3/4)} \\ &= \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Rechenregeln für konvergente Reihen

Da eine Reihe lediglich eine in besonderer Weise geschriebene Folge ist, gelten zu den Folgen analoge Rechenregeln:

Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = a$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = b$ und $c =$ const, so gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = a + b,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c\, a_k = c \sum_{k=0}^{\infty} a_k = c\, a.$$

Wegen des *Kommutativgesetzes* ist die Summe endlich vieler Zahlen immer unabhängig von der Reihenfolge der Summanden.

Die Summe einer konvergenten unendlichen Reihe ist mittels der Folge ihrer Partialsummen definiert. In diese geht aber die Reihenfolge der Summanden wesentlich ein, so dass man i.Allg. die Unabhängigkeit des Summenwertes von der Summationsreihenfolge nicht erwarten kann.

Abhängigkeit von Summationsreihenfolge

Bekanntlich konvergiert die sog. *alternierende harmonische Reihe* gegen den Grenzwert $\ln 2$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \ldots = \ln 2.$$

Wenn wir diese Reihe nun so umordnen, dass auf einen positiven Summanden stets zwei negative folgen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} (1 &- \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10}) - \frac{1}{12} + (\frac{1}{7} - \frac{1}{14}) - \ldots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \ldots \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ldots\right) = \frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

Die umgeordnete Reihe hat also einen anderen Wert ($\ln 2 \neq \frac{\ln 2}{2}$).

Absolut konvergente Reihe

Definition

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe der „absoluten Summanden“ $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Bei absolut konvergenten Reihen darf man die Summanden *beliebig umordnen*, die Reihe konvergiert dann immer noch gegen denselben Summenwert.

Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

ist *nicht* absolut konvergent, da die zugehörige Reihe mit den „absoluten Summanden“ auf die harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$

führt und diese divergiert.

Notwendiges Konvergenzkriterium

Bildet man aus der Folge (a_n) die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, so lässt sich jedes Folgenglied auch als Differenz zweier aufeinander folgender Partialsummen s_{n+1}, s_n schreiben:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = s_{n+1} - s_n.$$

Wenn man nun annimmt, dass die Reihe gegen die Summe s konvergiert, dann muss natürlich gelten:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0.$$

Wenn eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist die Folge der einzelnen Summanden (a_k) eine Nullfolge.
Umgekehrt: Wenn $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$, dann divergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Kriterium ist *nicht hinreichend*! Z.B. harmonische Reihe: Glieder $a_k = \frac{1}{k+1}$ bilden zwar Nullfolge, die Reihe ist aber divergent.

Beispiel

a) *Die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

divergiert, da die a_k *entweder* 1 *oder* -1 *sind, also keine Nullfolge bilden.*

b) *Die Summanden der Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}$$

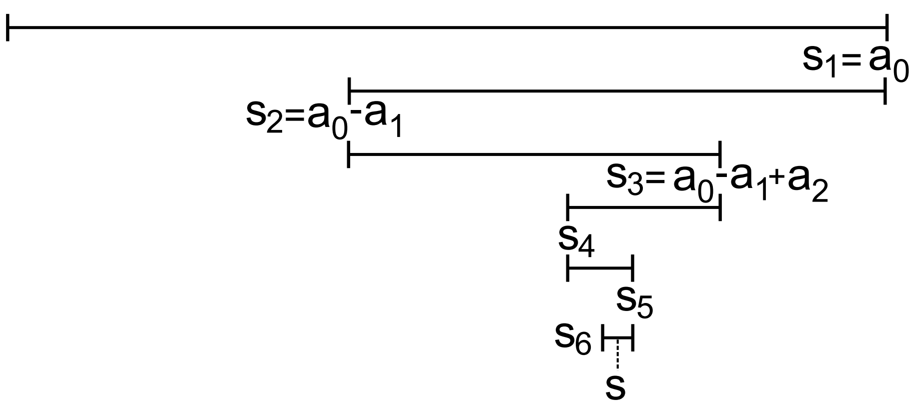
bilden eine Nullfolge. Da das Kriterium aber nicht hinreichend ist, kann man nicht entscheiden, ob die Reihe konvergiert oder nicht. Hierzu sind andere Kriterien nötig.

Leibniz-Kriterium

Dem notwendigen Kriterium sehr ähnlich ist ein hinreichendes Kriterium für sog. *alternierende Reihen*, deren Summanden abwechselndes Vorzeichen haben ($a_{2k} > 0$, $a_{2k+1} < 0$ oder umgekehrt).

Eine alternierende Reihe ist konvergent, wenn die Absolutbeträge der Summanden eine monoton fallende Nullfolge bilden.

Mit Hilfe der Abbildung kann man sich das Leibniz-Kriterium plausibel machen: Man sieht, wie die Partialsummenfolge s_n immer „weniger alterniert“ und gegen einen Grenzwert s konvergiert.



Beispiel

Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

konvergiert nach Leibniz-Kriterium, da

$$\left(\frac{1}{k+1}\right)$$

eine monoton fallende Nullfolge ist.

Übung

Konvergiert die Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ldots ?$$

Lösung

Es handelt sich hier um die sog. Leibniz'sche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Da

$$\left(\frac{1}{2k+1}\right)$$

eine monotone Nullfolge ist, konvergiert diese nach Leibniz-Kriterium.

Ihr Summenwert, den wir hier aber nicht ermitteln wollen, ergibt sich interessanterweise zu $\frac{\pi}{4}$.

Vergleichskriterium, Majorantenkriterium

Wichtig sind Kriterien für die absolute Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Die Summanden der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ sind alle nichtnegativ, daher bilden die zugehörigen Partialsummen eine monoton wachsende Folge.
Diese Partialsummenfolge und damit $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert also, falls sie nach oben beschränkt ist.

Ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und gilt für fast alle Summanden der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$

$$|a_k| \leq |c_k|,$$

dann ist auch diese absolut konvergent.

Die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ergibt sich sofort:Die monoton wachsende Partialsummenfolge

$$(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)_{n \in \mathbb{N}_+}$$

ist ja durch $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$ nach oben beschränkt.

Beispiel

Wir untersuchen die Konvergenz von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{4^k + 5}.$$

Zunächst stellen wir fest, dass für alle Summanden

$$a_k := \frac{3^k}{4^k + 5} < \frac{3^k}{4^k} = \left(\frac{3}{4}\right)^k := c_k$$

gilt. Für die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *gilt aber*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{1 - 3/4} = 4.$$

Da diese absolut konvergiert, folgt nach dem Majorantenkriterium auch die absolute Konvergenz unserer zu untersuchenden Reihe.

Vergleichskriterium, Minorantenkriterium

Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$ quasi so etwas wie eine obere Schranke für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ ist, nennt man erstere auch *Majorante*, entsprechend das Kriterium eben *Majorantenkriterium*.

Nun kann man umgekehrt auch untere Schranken für gewisse Reihen angeben, so genannte *Minoranten*. Mit diesen erhält man ein ähnliches Vergleichskriterium, das *Minorantenkriterium*:

Ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ divergent und gilt für fast alle k die Abschätzung

$$a_k \geq c_k \geq 0,$$

dann ist auch die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Übung

Ist die Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

konvergent?

Lösung

Wegen $k \geq \sqrt{k} \geq 0$ *folgt sofort*

$$a_k := \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k} =: c_k.$$

Deshalb ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

eine divergente Minorante für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Diese Reihe divergiert also ebenfalls.

Wurzelkriterium

Besonders hilfreich als „Vergleichsreihe“ ist die geometrische Reihe. Sie liefert das Wurzelkriterium:

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, wenn für ein positives $q < 1$ gilt:

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \quad \textbf{für fast alle } k.$$

Gilt hingegen $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ bzw. $|a_k| \geq 1$ für fast alle k, so divergiert die Reihe.

Da aus $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ sofort $|a_k| \leq q^k$ folgt, ist die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ offenbar eine Majorante für $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Diese konvergiert absolut, weil für $|q| < 1$ die geometrische Reihe absolut konvergent ist. Die Divergenzaussage ist offensichtlich.

Beispiel

Für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^k)^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots$$

gilt mit $k \geq 1$

$$\sqrt[k]{|\, a_k \,|} = \frac{1}{|\, 3+(-1)^k \,|} \leq \frac{1}{2} (=: q).$$

Nach dem Wurzelkriterium ist die Reihe daher konvergent.

Übung

Ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{(3+(-1)^k)^k}$$

konvergent?

Lösung

Mit $k \geq 1$ *gilt die Abschätzung*

$$\sqrt[k]{|\, a_k \,|} = \frac{5}{|\, 3 + (-1)^k \,|} \geq \frac{5}{4} \geq 1.$$

Also ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium divergent.

Quotientenkriterium

Aus dem Wurzelkriterium kann man ein weiteres Kriterium folgern, das Quotientenkriterium:

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, wenn für ein positives $q < 1$ gilt:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q \quad \text{für fast alle } k.$$

Gilt hingegen $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \ge 1$ für fast alle k, so divergiert die Reihe.

Beispiel
Um die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^5} = 2 + \frac{1}{8} + \frac{8}{243} + \frac{1}{64} + \dots$$

zu bestimmen, ermittelt man den Quotienten

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{2^{k+1} \cdot k^5}{(k+1)^5 \cdot 2^k}\right| = 2\left(\frac{k}{k+1}\right)^5 .$$

Für fast alle k, nämlich für $k \geq 7$, gilt aber

$$2\left(\frac{k}{k+1}\right)^5 \geq 1.02.$$

Somit ist die Reihe divergent.

Übung

Entscheiden Sie mit dem Quotientenkriterium, ob die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

konvergent ist.

Lösung

Es gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2}$$

für $k > 0$.

Damit folgt die Konvergenz der Reihe.

Quotientenkriterium — einfache Version

In beiden Kriterien ist die Bedingung $q < 1$ sehr wichtig. Gilt für fast alle k nur

$$\sqrt[k]{|a_k|} \le 1 \quad \text{bzw.} \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le 1,$$

dann kann man keine Entscheidung treffen (z.B. Konvergenz: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, Divergenz: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$).

Leichter zu handhaben als das Wurzelkriterium, dafür aber nicht so weitreichend, ist das Quotientenkriterium. Ist speziell die Folge $\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, so genügt eine *Grenzwertuntersuchung*:

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist dann absolut konvergent, wenn gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q < 1$$

bzw. divergent, wenn gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q > 1.$$

Potenzreihen

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für beliebige $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$.

Anders ausgedrückt kann man — statt q verwenden wir jetzt $x \in \mathbb{R}$ — sagen, dass für $|x| < 1$ die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ durch eine unendliche Reihe dargestellt wird. Es gilt schließlich

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{für } |x| < 1.$$

Die Summanden dieser Reihe sind Potenzen von x. Man nennt solche Reihen daher *Potenzreihen*.

Definition

Gegeben seien eine Folge (a_k) und eine fixe reelle Zahl x_0. Dann bezeichnet man für $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

als Potenzreihe. Die a_k heißen Koeffizienten und x_0 nennt man Entwicklungspunkt.

Konvergenzradius und -intervall

Mit Hilfe der bekannten Konvergenzkriterien kann man nun überprüfen, für welche x-Werte eine Reihe konvergiert:

Es gibt Potenzreihen, die für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren, solche die nur im Punkt x_0 konvergieren und andere, die dann konvergieren, wenn x Werte aus einem Intervall der Form $(x_0 - r, x_0 + r)$ mit reellem $r > 0$ annimmt.

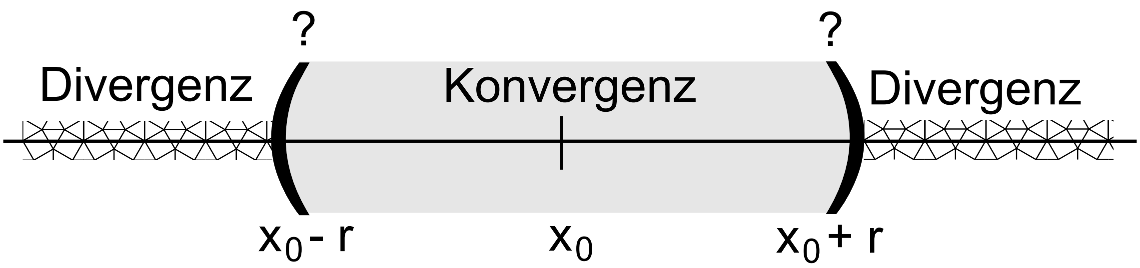
Für jede Potenzreihe, die nicht nur im Entwicklungspunkt x_0 konvergiert, existiert eine reelle Zahl $r > 0$, so dass die Potenzreihe überall im Intervall

$$|x - x_0| < r \quad \textbf{(Konvergenzintervall)}$$

konvergiert und für $|x - x_0| > r$ divergiert. Die Zahl r nennt man Konvergenzradius. Konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$, so setzt man $r = \infty$.

Konvergenzbereich von Potenzreihen

Ob eine Potenzreihe auch an den Randstellen des Konvergenzintervalls, d.h. für $x = x_0 \pm r$, konvergiert, muss jeweils gesondert untersucht werden. Die Abbildung veranschaulicht das Konvergenzverhalten von Potenzreihen:



Der Begriff „Konvergenzradius“ kommt übrigens aus der „Komplexen Analysis“:

Man kann in einer Potenzreihe anstelle der reellen Variablen x auch eine komplexe Variable $z \in C$ zulassen. In diesem Falle ist der Konvergenzbereich dann ein Kreis mit Radius r.

Beispiel

a) *Die Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ *hat den Entwicklungspunkt* $x_0 = 0$ *und den Konvergenzradius* $r = 1$. *Das Konvergenzintervall ergibt sich zu*

$$(-1, +1).$$

In den Rändern divergiert die Reihe bekanntlich.

b) *Gegeben sei die Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. *Mit* $a_k = \frac{x^k}{k!}$ *gilt für festes, aber beliebiges* x

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{x}{k+1}\right| = 0 < 1. \end{aligned}$$

Aus der „einfachen Version“ des Quotientenkriteriums folgt daher die Konvergenz der Reihe für beliebige reelle x. *Die Reihe hat den Konvergenzradius* $r = \infty$ *und das Konvergenzintervall* $(-\infty, \infty)$.

Übung

a) *Welchen Konvergenzradius hat*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}?$$

b) *Bestimmen Sie Konvergenzintervall und Konvergenzradius der Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k.$$

Lösung

a) *Es ist*

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\bigg/\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)} = 0,$$

also kleiner 1 *für festes, aber beliebiges* x. *Die Reihe konvergiert damit nach Quotientenkriterium für alle reellen* x. *Man sagt, dass sie den Konvergenzradius* $r = \infty$ *hat.*

b) *Wir setzen* $a_k := k!\,x^k$ *und benutzen das Quotientenkriterium:*

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)!\,x^{k+1}}{k!\,x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}|(k+1)x| = \infty$$

für beliebige $x \neq 0$. *Die Reihe konvergiert nur für* $x = 0$. *Das Konvergenzintervall besteht damit lediglich aus dem Punkt* $x = 0$. *Man sagt, dass die Reihe den Konvergenzradius* $r = 0$ *hat.*

Taylorreihen

Betrachten wir eine beliebig oft differenzierbare Funktion $y = f(x)$ und deren Taylorentwicklung um x_0 vom Grad n, ($R_n(x)$ ist das Lagrange'sche Restglied)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x),$$

so können wir den Grenzübergang $n \to \infty$ vornehmen und erhalten eine spezielle Potenzreihe:

Definition

Die Taylorreihe der Funktion $y = f(x)$ bzgl. der Stelle x_0 ist definiert durch

$$\boldsymbol{T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.}$$

Übereinstimmungs-Kriterium

Auch Taylorreihen haben einen Konvergenzradius. Es stellt sich allerdings die Frage, ob die Funktion $T(x)$, die durch sie definiert wird, im Konvergenzintervall mit der Ausgangsfunktion $f(x)$ übereinstimmt.

Da die n-te Partialsumme der Taylorreihe das n-te Taylorpolynom ist, erhält man aus der Taylorformel sofort:

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f(x)$ durch die zugehörige Taylorreihe $T(x)$ im Konvergenzintervall dargestellt wird, ist:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$$

mit $x_0 < \xi < x$ bzw. $x < \xi < x_0$.

Beispiel

Für $f(x) = \mathrm{e}^x$ *gilt*

$$f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$$

und somit

$$f^{(k)}(0) = 1 \quad \textit{für} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Daher ergibt sich die Taylorreihe der Exponentialfunktion *bzgl.* $x_0 = 0$ *zu*

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Diese Reihe hat den Konvergenzradius $r = \infty$*. Fraglich ist noch, ob sie mit der* e*-Funktion übereinstimmt. Mit geeignetem* ξ *und* $\mathrm{e}^\xi \le M$ *(*x *fest!) gilt*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} R_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^\xi \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\le M \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \end{aligned}$$

da natürlich auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ *überall konvergiert, deren Summanden also notwendigerweise eine Nullfolge bilden.*

Potenzreihenentwicklung von e^x

Die Taylorreihe stimmt daher mit der Exponentialfunktion überein:

$$\mathbf{e}^{\boldsymbol{x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Obige Gleichung wird auch als Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion *bezeichnet.*

Übung

Ermitteln Sie die Taylorreihe $T(x)$ *der Funktion*

$$y = \sin x$$

in $x_0 = 0$.

Für welche Werte von x *konvergiert diese Reihe?*

Lösung

Für die Funktion $f(x) = \sin x$ und deren Ableitungen gilt:

$$\begin{array}{rclrcl}
f(x) & = & \sin x, & f(0) & = & 0, \\
f^{(1)}(x) & = & \cos x, & f^{(1)}(0) & = & 1, \\
f^{(2)}(x) & = & -\sin x, & f^{(2)}(0) & = & 0, \\
f^{(3)}(x) & = & -\cos x, & f^{(3)}(0) & = & -1, \\
f^{(4)}(x) & = & \sin x, & f^{(4)}(0) & = & 0, \quad \textit{usw.}
\end{array}$$

Die Ableitungswerte von $f(x)$ in $x_0 = 0$ ergeben sich also zyklisch zu $0, 1, 0, -1$. Somit gilt:

$$T(x) = 0+1\cdot x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\ldots$$

Man erwartet folgende Potenzreihenentwicklung von $\sin x$*:*

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\pm\ldots
\end{aligned}}$$

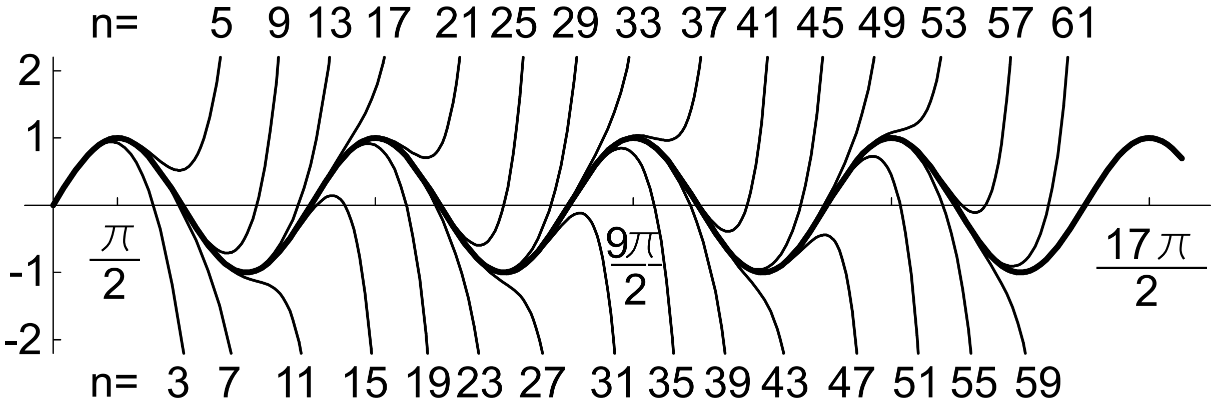
$y(x) = \sin x$ und zugeh. Taylorpolynome

Diese Vermutung lässt sich leicht verifizieren: Bekannt ist, dass das Konvergenzintervall dieser Reihe $(-\infty, \infty)$ *ist.*

Zudem stellt sie $f(x) = \sin x$ *dar, da mit geeignetem* ξ *unter Beachtung von* $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq 1$ *folgt:*

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = 0.$$

Die Abbildung zeigt die Sinus-Funktion und ihre zugehörigen Taylorpolynome der ungeraden Ordnungen $n = 3, 5, \ldots, 61$.



Potenzreihenentwicklung von $\cos x$

Auf ähnliche Weise erhält man auch die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \cos x$:

Definition

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots \end{aligned}$$

Zenons berühmtestes Paradoxon

Im 5. vorchristlichen Jahrhundert lebte im damals griechischen Süditalien Zenon von Elea, der durch die nach ihm benannten Paradoxien viel Verwirrung stiftete. Zenons berühmtestes Paradoxon ist das von Achilles und der Schildkröte:

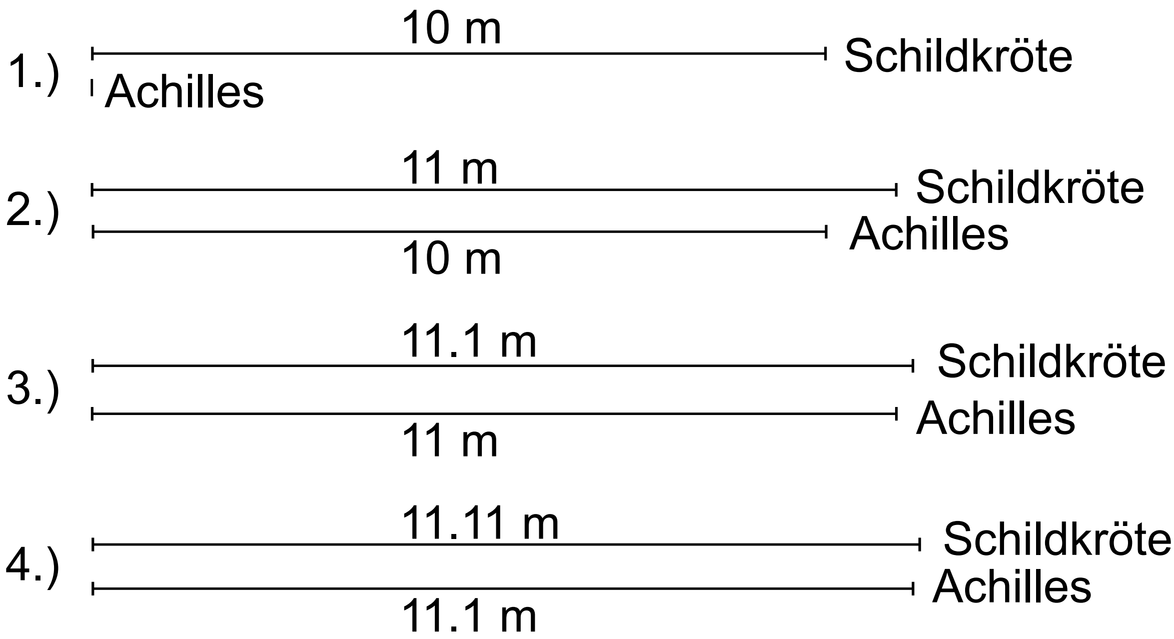
Der Held Achilles war als besonders schneller Läufer bekannt und gab deshalb einer (10-mal langsameren) Schildkröte einen Vorsprung von 10 m. Zenon überlegte nun, dass Achilles die Schildkröte niemals einholen werde. Warum?

Nun, wenn Achilles den anfänglichen Vorsprung der Schildkröte durchlaufen hat, ist diese 1 m vorgerückt.

Wenn Achilles diesen 1 m zurücklegt, ist die Schildkröte wiederum ein Stück (nämlich 10 cm) weiter. Und wenn Achilles auch diesen Vorsprung einholt, so hat die Schildkröte 1 cm gut gemacht. Usw.

Achilles und die Schildkröte

Immer dann wenn Achilles den vorigen Vorsprung der Schildkröte eingeholt hat, ist diese wieder ein kleines Stückchen weiter. Also holt er sie nie ein.



Das klingt sehr logisch! Dennoch widerspricht es jeglicher Alltagserfahrung:

Schnellere Läufer überholen langsamere, auch wenn diese einen Vorsprung hatten. Der heranpreschende Porsche wird auf der Autobahn am langsameren Polo ohne Probleme vorbeiziehen.

Konvergente geometrische Reihe

Wenn wir die oben genannten Strecken des Achilles zusammenzählen, so erhalten wir die konvergente geometrische Reihe

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots = 10+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

$$= 10+\frac{1}{1-1/10} = 10+\frac{10}{9} = 11.\overline{1}.$$

Den Wert $11.\overline{1}$ erhalten wir auch durch folgende einfache Überlegung. Wenn die Geschwindigkeit der Schildkröte v beträgt, dann ist die Geschwindigkeit von Achilles $10v$. Der Weg s, den Achilles bzw. die Schildkröte in der Zeit t zurücklegen, ist

$$\begin{array}{lrcl} & s_{\text{Achilles}} & = & 10v \cdot t \\ \text{bzw.} & s_{\text{Schildkröte}} & = & v \cdot t + 10. \end{array}$$

Die beiden Läufer treffen einander, wenn beide Wege gleich sind:

$$10v \cdot t = v \cdot t + 10.$$

Treffpunkt der Läufer

$$10v \cdot t = v \cdot t + 10.$$

Diese einfache Gleichung ergibt $9vt = 10$ bzw. nach t aufgelöst: $t = \frac{10}{9v}$. In eine der beiden Strecken s_{Achilles} oder $s_{\text{Schildkröte}}$ eingesetzt erhalten wir:

$$s = 10v \cdot \frac{10}{9v} = \frac{100}{9} = 11.11111... = 11.\overline{1}.$$

Also: Bei der Marke $11.\overline{1}$ m hat Achilles die Schildkröte eingeholt. Dies ist gerade die (endliche) Summe obiger konvergenter geometrischer Reihe.

Es gibt übrigens noch eine subtilere Form der Paradoxie von Achilles und der Schildkröte: Danach kann Achilles überhaupt nicht starten. Denn bevor er den Vorsprung der Schildkröte zurückgelegt hätte, müsste er ja erst die halbe Strecke durchlaufen haben, vor der Hälfte müsse er ein Viertel passiert haben, davor ein Achtel, davor ein Sechzehntel ... Also käme er überhaupt nicht zum Loslaufen!

Wie wertet der Taschenrechner z.B. die e-Funktion aus?

Grob gesagt sind mathematisch und für den Taschenrechner die genannten Funktionen über ihre *Taylorreihe* definiert und werden durch Auswertung eines *Taylor-Polynoms* mit kleinem Restglied näherungsweise berechnet.

Für die e-Funktion wird etwa die folgende Taylorreihenentwicklung benutzt:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

bzw.

$$\mathrm{e}^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}}_{\text{Taylorpolynom}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Restglied}}$$

mit dem Lagrange'schen Restglied

$$R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

mit $0 < \xi < x$ bzw. $x < \xi < 0$.

Rechengenauigkeit

Ein üblicher Taschenrechner hat etwa 8 Stellen im Display und rechnet intern mit 10 Stellen Genauigkeit. Um also dem vom Taschenrechner berechneten Wert trauen zu können, muss eine Genauigkeit von $\epsilon = 0.5 \cdot 10^{-11}$ (wegen Auf- bzw. Abrunden) erzielt werden, d.h. das Restglied $R_n(x)$ muss kleiner als ϵ werden.

Dazu betrachten wir zunächst den Bereich $-0.1 < x < 0.1$. Das Restglied können wir dann mit

$$|R_n| \leq \frac{\mathrm{e}^{0.1}}{(n+1)!} \cdot 0.1^{n+1}$$

abschätzen. Für $n = 5$ ergibt sich für das Restglied $|R_5| \leq 1.53 \cdot 10^{-9}$ und bereits für $n = 6$ erhalten wir $|R_6| \leq 2.19 \cdot 10^{-11} < \epsilon$. D.h. wir sind auf der sicheren Seite, wenn wir im Bereich von $-0.1 < x < 0.1$ die e-Funktion durch das Taylorpolynom 6-ten Grades annähern:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}.$$

Genauigkeits-Probleme I

Wir haben nun das Problem der Annäherung der e-Funktion im Bereich $-0.1 < x < 0.1$, also nahe am Entwicklungspunkt 0 der Potenzreihe, gelöst.

Wollten wir mit der gleichen Genauigkeit (10 Stellen) im Bereich $-1 < x < 1$ rechnen, so müssten wir insgesamt ganze 13 Terme auswerten.

Und im Bereich $-10 < x < 10$ könnten wir bei der geforderten Genauigkeit ϵ erst beim Taylorpolynom 36-ten Grades sicher sein.

Ein weiteres Problem stellt die Auswertung der Taylorreihe für $x < 0$ dar. Dieses Problem kann man aber ganz elegant durch die Formel

$$\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x}}$$

umgehen und sozusagen die Auswertung für negative x auf die Auswertung für positive x und Kehrwertbildung zurückführen.

Genauigkeits-Probleme II

Was passiert aber nun für $x >> 0$? Hier gibt es mehrere Möglichkeiten. Man kann z.B. die x-Werte mit $x > 0.1$ in den Bereich $0 < x < 0.1$ transformieren. Wegen

$$\left(e^{\frac{x}{2^m}}\right)^{2^m} = e^x$$

suche man zunächst eine Zahl m, so dass $\tilde{x} = \frac{x}{2^m} < 0.1$, werte $e^{\tilde{x}}$ aus über das Taylorpolynom 6-ten Grades, dann quadriere man m-mal (wegen hoch 2^m).

Eine andere Möglichkeit wäre es, die Zahl $x > 0.1$ in einen ganzzahligen Anteil, in einen Anteil zwischen 0.1 und 1 und in einen Anteil kleiner 0.1 zu zerlegen, also etwa $23.421 = 23 + 0.4 + 0.021$. Dann ist

$$e^{23.421} = e^{23} \cdot e^{0.4} \cdot e^{0.021}.$$

Die Auswertung von $e^{0.021}$ erfolgt über das Taylorpolynom 6-ten Grades, $e^{0.4}$ entnehme man einer Tabelle mit allen Werten von $e^{0.1}$, $e^{0.2}$, ... bis $e^{0.9}$. Auch für e^{23} kann man Tabellen benutzen, etwa solche mit Werten e^1, e^2, e^5, e^{10} etc.

Auswertungs-Alternativen

Auch für das Taylorpolynom 6-ten Grades lassen sich noch Verbesserungen finden. Zunächst sollte man es mit dem Horner-Schema auswerten:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$$

$$= \left(\left(\left(\left(\left(\frac{1}{6!}x + \frac{1}{5!}\right)x + \frac{1}{4!}\right)x + \frac{1}{3!}\right)x + \frac{1}{2!}\right)x + 1\right)x + 1.$$

Die Fakultäten kann man wiederum als Konstanten im Speicher ablegen. Es werden dann für die Auswertung obigen Polynoms nur 6 Multiplikationen (und 6 Additionen) benötigt. Aber selbst hier kann man die Zahl der benötigten Multiplikationen/Divisionen noch reduzieren. Man kann obiges Taylorpolynom auch durch eine rationale Funktion approximieren:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} \approx \frac{x^3 + 12x^2 + 60x + 120}{-x^3 + 12x^2 - 60x + 120}.$$

Padé-Approximation

Man gewinnt diesen Ausdruck durch die so genannte *Padé-Approximation*, einer Erweiterung der Taylor'schen Polynomnäherung auf rationale Funktionen. Den erhaltenen Bruch kann man dann noch durch sukzessive Polynomdivision in einen *Kettenbruch* überführen — im obigen Beispiel erhielte man:

$$\frac{x^3 + 12x^2 + 60x + 120}{-x^3 + 12x^2 - 60x + 120} = -1 + \cfrac{24}{-x + 12 - \cfrac{50}{x + \cfrac{10}{x}}}.$$

Der Vorteil bei der Auswertung dieses Kettenbruchs liegt darin, dass hier nur noch 3 Divisionen (und einige Additionen) auszuführen sind. Es geht also doppelt so schnell wie beim Einsetzen in obiges Horner-Polynom.