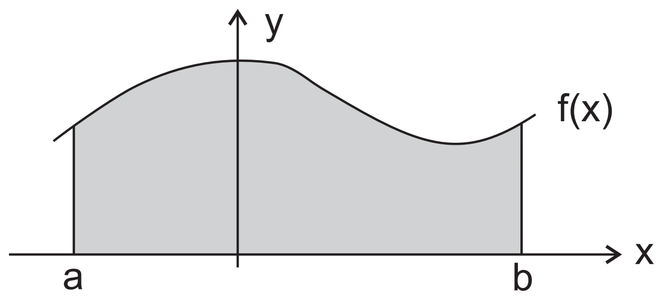
Kapitel 8

Integration

- Einführung
- Grundbegriffe
- Integrationstechniken
- Uneigentliche Integrale
- Mehrfachintegrale
- Integration in Polarkoordinaten
- Anwendungen

Fragestellung bei Integration

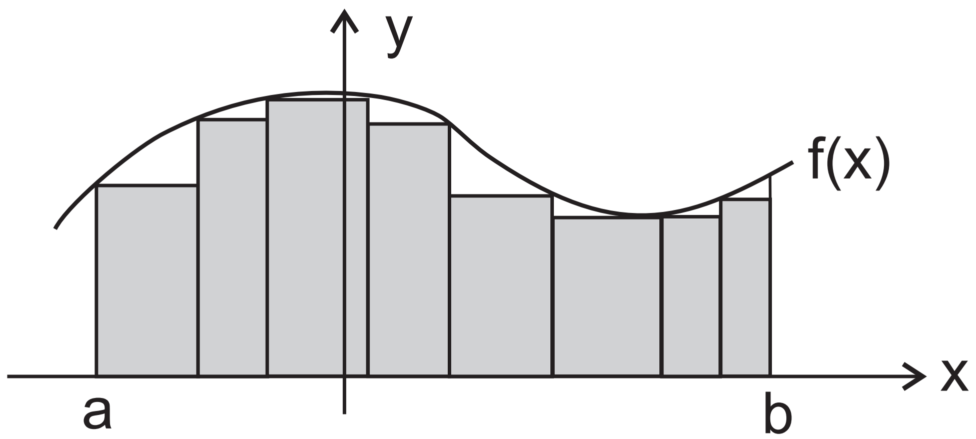
Bei der Integration geht es anschaulich gesprochen um die Frage der Flächenmessung: Sei dazu eine auf einem Intervall $[a, b]$ definierte, beschränkte Funktion $f(x)$ gegeben.



Wie kann man dann den grau unterlegten Flächeninhalt zwischen Funktion und x-Achse berechnen (oder überhaupt erst definieren)?

Idee bei Integration

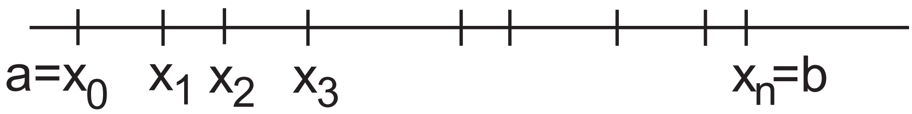
Man zerlegt die zu bestimmende Fläche in (kleine) Rechtecke und summiert deren Flächeninhalte auf. Will man eine noch bessere Näherung, so muss man die Fläche in immer mehr und immer „dünnere“ Rechtecke aufteilen.



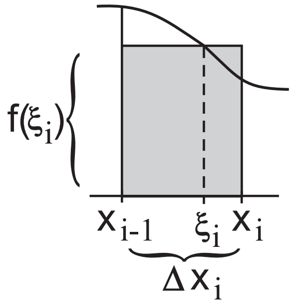
Vorgehen bei Integration

Im Einzelnen ist folgende Prozedur durchzuführen:

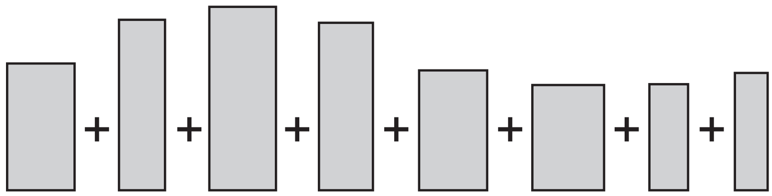
- Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, der Breite $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ zerlegen (dabei $a = x_0$, $b = x_n$),



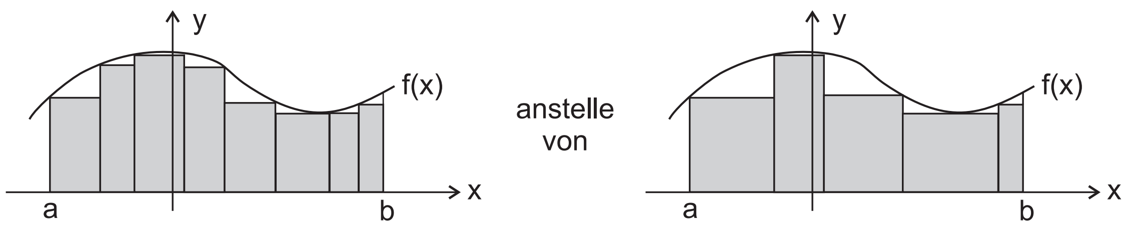
- über jedem Teilintervall ein Rechteck konstruieren, dessen Länge einem Funktionswert von f an irgendeiner Zwischenstelle $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ aus diesem Teilintervall entspricht,



- alle einzelnen Rechteckflächen $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ aufsummieren zur Gesamtfläche
$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$,



- Näherungswert s_n verbessern, indem man eine feinere Unterteilung (= Partition) des Intervalls $[a, b]$ wählt und damit die Anzahl der Teilintervalle erhöht, aber gleichzeitig die Breite *aller* verkleinert.



Bestimmtes Integral

Definition

Falls die beschriebene Prozedur für $n \to \infty$ in jedem Fall gegen einen bestimmten Grenzwert konvergiert, so bezeichnet man

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

als bestimmtes Integral von f über dem Intervall $[a, b]$. Dann heißt die Funktion f integrierbar über $[a, b]$, a untere Integrationsgrenze, b obere Integrationsgrenze, $[a, b]$ Integrationsintervall, f Integrand und x Integrationsvariable.

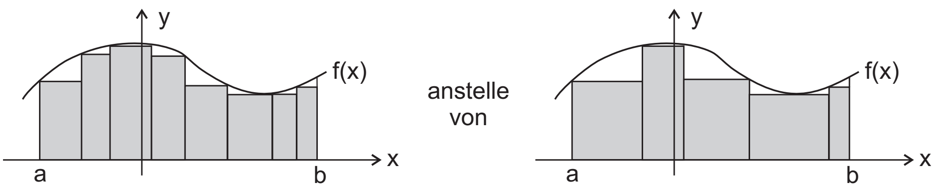
Bemerkungen zum bestimmten Integral

- Das Integralzeichen $\int$ ist ein stilisiertes Summenzeichen $\sum$.

- Man kann die Integrationsvariable beliebig umbenennen:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(\eta)\,d\eta.$$
Das bestimmte Integral ist *eine reelle Zahl*, die *nicht* von der Integrationsvariable abhängt.

Riemann'sche Zwischensummen Obersumme, Untersumme

Man spricht bei $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ von *Riemann'-chen Zwischensummen*. Das Integral nennt man auch *Riemann-Integral*. Wählt man ξ_i derart, dass $f(\xi_i)$ im Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ *minimal* wird, spricht man von einer *Untersumme*:

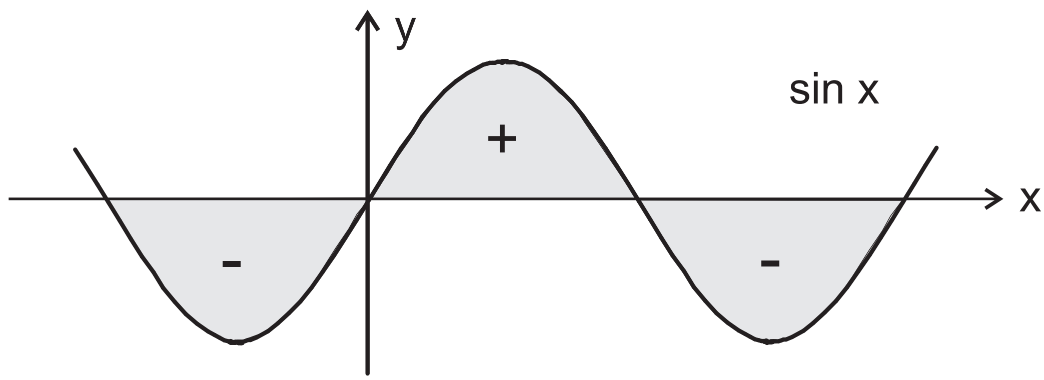


Die Rechtecke liegen dann ganz anschaulich direkt *unter* der Funktion. Analog definiert man *Obersummen*. Man kann die Integrierbarkeit einer Funktion $f(x)$ auf einem Intervall $[a, b]$ auch so charakterisieren, dass die Folge der Untersummen und die der Obersummen gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergiert.

Vorzeichen bei Bestimmung des Flächeninhalts

Falls $f(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ gilt, so kann man wirklich von einem Flächeninhalt sprechen.

Ansonsten gehen die Flächenstücke unterhalb der x-Achse (wo $f(x) < 0$) *mit negativem Vorzeichen* in das bestimmte Integral ein.



Bemerkungen zum bestimmten Integral

Für sehr viele Funktionen ist die oben geforderte Konvergenz gegeben.

Man kann zeigen: Wenn die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ *stetig* ist (evtl. mit Ausnahme endlich vieler endlicher Sprungstellen), dann ist f auf $[a, b]$ integrierbar.

Rechenregeln für das bestimmte Integral

Für das bestimmte Integral gilt:

a) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$

b) $\int_a^a f(x)\,dx = 0,$

c) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$
$a < c < b$

d) $\int_a^b \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx,$

e) $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx$
$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$

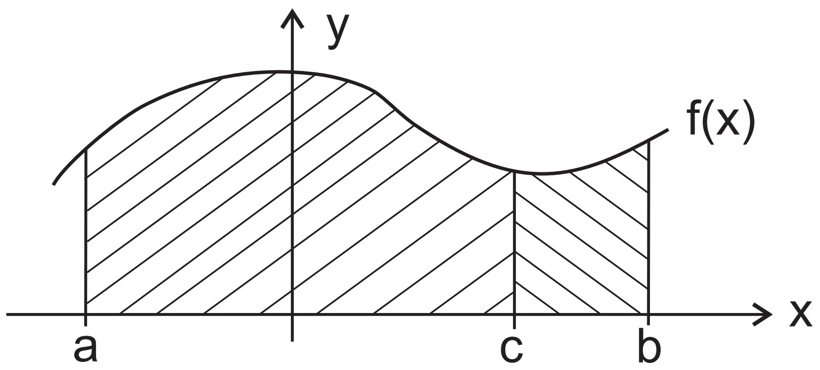
f) **Falls** $f(x) \leq g(x)$ **und** $a \leq b$, **dann gilt:**
$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx,$

g) **Falls** $m \leq f(x) \leq M$ **für alle** $x \in [a, b]$, **dann gilt:**
$m\,(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b - a).$

Rechenregeln für das bestimmte Integral (Veranschaulichung)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

für $a < c < b$

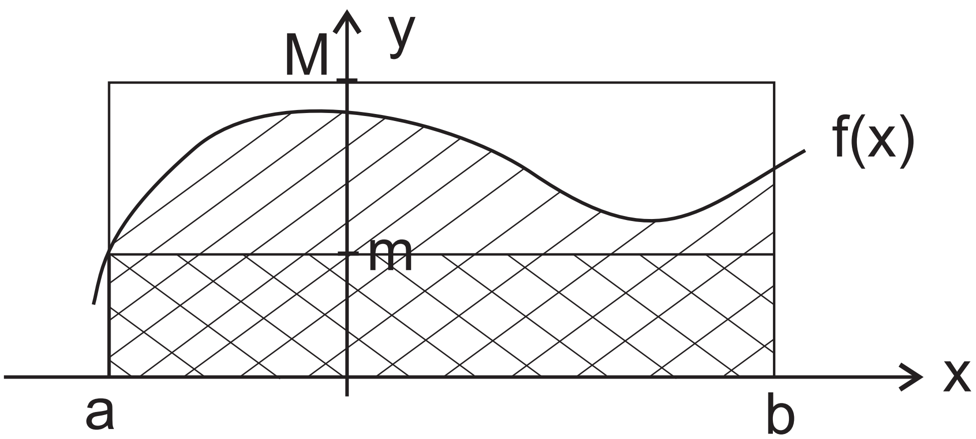


Rechenregeln für das bestimmte Integral (Veranschaulichung)

Falls $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$,

dann gilt:

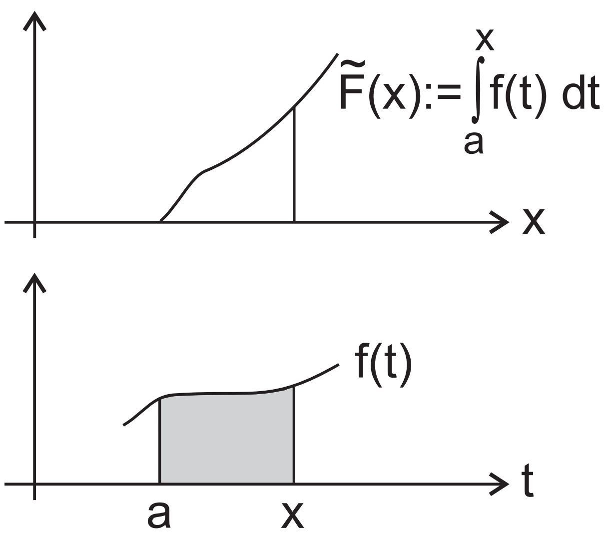
$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a).$$



Integralfunktion

Wir betrachten das bestimmte Integral über eine stetige, monoton steigende Funktion $f(t) \geq 0$ von a (fest) bis zu einer oberen Grenze $x > a$ (variabel). Das derart definierte bestimmte Integral mit variabler oberer Grenze x liefert die Zuordnungsvorschrift für eine neue Funktion

$$\tilde{F}(x) := \int_a^x f(t)\, dt.$$



Ableitung der Integralfunktion

Wir betrachten nun den Flächenzuwachs zwischen $\tilde{F}(x)$ und $\tilde{F}(x+h)$. Es gilt:

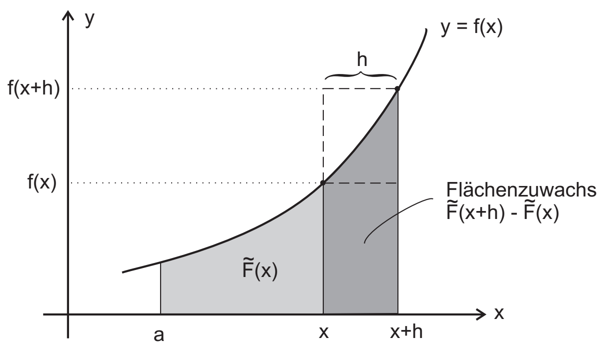
$$f(x) \cdot h \leq \tilde{F}(x+h) - \tilde{F}(x) \leq f(x+h) \cdot h.$$

Division durch h mit anschließendem Grenzübergang $h \to 0$ liefert:

$$\lim_{h \to 0} f(x) \leq \lim_{h \to 0} \frac{\tilde{F}(x+h) - \tilde{F}(x)}{h} \leq \lim_{h \to 0} f(x+h).$$

Wegen der Stetigkeit von f folgt:

$$f(x) \leq \tilde{F}\,'(x) \leq f(x) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{F}\,'(x) = f(x).$$



Ableitung der Integralfunktion

Es sei f eine auf $[a, b]$ definierte stetige Funktion. Die durch

$$\tilde{F}(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

definierte Integralfunktion hat die Ableitung

$$\tilde{F}\,'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\, dt\right) = f(x).$$

Die Ableitung der Integralfunktion ist also gleich dem Wert des Integranden an der oberen Grenze. Die Integration ist demnach die Umkehrung der Differentiation.

Stammfunktion

Definition

Eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung gleich einer gegebenen Funktion $f(x)$ ist, d.h. für die $F'(x) = f(x)$ auf einem Intervall gilt, heißt Stammfunktion von f auf diesem Intervall.

Beispiel

a) *Die Funktion* $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3$ *ist Stammfunktion der Funktion* $f(x) = x^2$*.*

b) *Die Funktion* $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 17$ *ist Stammfunktion der Funktion* $f(x) = x^2$*.*

c) *Die Funktion* $\tilde{F}(x) = \int_a^x t^2\,dt$ *ist Stammfunktion der Funktion* $f(x) = x^2$*.*

Hat man aber eine Stammfunktion gefunden (wie in a)), so erhält man durch Addition einer beliebigen Konstanten (z.B. von -17 in b)) eine weitere Stammfunktion, denn die Ableitung einer Konstanten ist immer gleich 0. Es gilt sogar, dass man durch Addition einer beliebigen Konstanten zu einer Stammfunktion *alle Stammfunktionen* einer Funktion erhält.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $F(x)$ eine (beliebige) Stammfunktion von $f(x)$. Dann gilt für das bestimmte Integral

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_{x=a}^{b} = F(b) - F(a).}$$

Mit Hilfe des Hauptsatzes lassen sich bestimmte Integrale ganz einfach in zwei Schritten berechnen:

- Man bestimme eine beliebige Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ (Beachte: $F'(x) = f(x)$).

- Man werte die Stammfunktion an der oberen und an der unteren Integrationsgrenze aus ($F(b)$ und $F(a)$) und subtrahiere diese beiden Werte.

Beispiel

Gesucht ist das bestimmte Integral:

$$\int_1^2 (x^2 - 6\cos(2x))\,dx.$$

Eine Stammfunktion von $f(x) = x^2 - 6\cos(2x)$ *ist*

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3\sin(2x),$$

denn die Ableitung (Kettenregel!) von $F(x)$ *ergibt gerade* $f(x)$. *Die Stammfunktion an der oberen Integrationsgrenze ausgewertet hat den Wert* $F(2) \approx 4.9371$, *an der unteren Integrationsgrenze erhält man entsprechend* $F(1) \approx -2.3946$. *Subtraktion ergibt* $F(2) - F(1) \approx 7.3317$. *Also ist insgesamt:*

$$\int_1^2 (x^2 - 3\cos(2x))\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - 3\sin(2x)\right)\Bigg|_{x=1}^{2}$$

$$\approx 4.9371 - (-2.3946) = 7.3317.$$

Übung

Berechnen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung die folgenden Integrale:

a) $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ *und* *b)* $\int_1^2 \sqrt{x} \, dx$.

Lösung

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx &= \sin x\Big|_{x=0}^{\pi/2} \\
&= \sin(\pi/2) - \sin 0 \\
&= 1 - 0 = 1.
\end{aligned}$$

b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \sqrt{x} \, dx &= \int_1^2 x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2}\Big|_{x=1}^{2} \\
&= \frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 1^{3/2}\right) \\
&\approx \frac{2}{3}(2.8284 - 1) \approx 1.2189.
\end{aligned}$$

Tabelle der Grundintegrale

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$x^\alpha, \quad \alpha \neq -1$ $\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$	$\frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1} + c$ $\ln\|x\| + c$
e^x	$e^x + c$
$\sin x$ $\cos x$	$-\cos x + c$ $\sin x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \|x\| < 1$	$\arcsin x + c$

Unbestimmtes Integral

Definition

Die Menge aller Stammfunktionen von f wird mit $\int f(x)\,dx$ bezeichnet und heißt unbestimmtes Integral von f.

Die Bezeichnung $\int f(x)\,dx$ für das unbestimmte Integral drängt sich durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung förmlich auf:

Man erhält das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, indem man einen Vertreter der Stammfunktionen, genannt $\int f(x)\,dx$, wählt und an den Integrationsgrenzen a und b auswertet.

Rechenregeln für unbestimmte Integrale

Es gilt:

a) $\int \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \cdot \int f(x)\,dx,$

b) $\int (f(x) + g(x))\,dx$
$= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

Übung

Worin besteht der Unterschied zwischen $\int \cos x\, dx$, $\int_0^x \cos t\, dt$ *und* $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$ *?*

Lösung

a) *Der Ausdruck* $\int \cos x\, dx$ *heißt unbestimmtes Integral und steht für die Gesamtheit aller Stammfunktionen von* $\cos x$*:* $\int \cos x\, dx = \sin x + c$.

b) *Der Term* $\int_0^x \cos t\, dt$ *ist eine einzelne Stammfunktion von* $\cos x$*.*

c) *Schließlich ist* $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$ *ein bestimmtes Integral, dessen Wert gleich der reellen Zahl* 1 *ist. Anschaulich gesprochen gibt* $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$ *den Flächeninhalt zwischen der Cosinus-Funktion und der* x*-Achse über dem Intervall* $[0, \pi/2]$ *an.*

Partielle Integration

Die Produktregel der Differentialrechnung für die Ableitung des Produktes zweier Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ lautet:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Integration auf beiden Seiten liefert:

$$u(x)v(x) = \int (u(x)v(x))' dx$$

$$= \int u'(x)v(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx.$$

Nach Umordnung der Terme erhalten wir:

Die Integrationsregel der partiellen Integration lautet:

$$\boldsymbol{\int u'(x) \cdot v(x) dx}$$

$$\boldsymbol{= u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx.}$$

Bemerkungen zur Partiellen Integration

- Die Integrationsregel „Partielle Integration“ hat ihren Namen erhalten, da sozusagen ein Teil des Integrals, nämlich $u(x) \cdot v(x)$, berechnet wird und der andere Teil als $\int u(x) \cdot v'(x)\, dx$ stehen bleibt.

- Partielle Integration ist nur sinnvoll, wenn das verbleibende Integral $\int u(x) \cdot v'(x)\, dx$ auf der rechten Seite *einfacher zu berechnen* ist als das Ausgangsintegral $\int u'(x) \cdot v(x)\, dx$.

- Man wähle zur Integration eines Produktes von Funktionen eine Funktion als $u'(x)$ (*von ihr muss man die Stammfunktion kennen*) und eine Funktion als $v(x)$ (*diese Funktion muss man ableiten können*).

Beispiel

Eine einfache Anwendung der partiellen Integration liefert die Stammfunktion zu $\int x \cdot \mathrm{e}^x \, dx$:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{u'} \cdot \underbrace{x}_{v} \, dx &= \underbrace{\mathrm{e}^x}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'} \, dx \\ &= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c.\end{aligned}$$

Wir wollen nun noch kurz untersuchen, was passiert wäre, wenn wir als u' bzw. v die jeweils andere Funktion gewählt hätten:

$$\int \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v} \, dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v'} \, dx$$

Diese Gleichung ist zwar mathematisch korrekt, führt aber nicht weiter, da das verbleibende Integral $\int x^2 \mathrm{e}^x \, dx$ komplizierter ist als das Ausgangsintegral $\int x\mathrm{e}^x \, dx$.

Beispiel

Mit einem kleinen Trick (dem Satz von Pythagoras: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) lässt sich das Integral $\int \sin^2 x \, dx$ mittels partieller Integration berechnen:

$$\int \underbrace{\sin x}_{u'} \cdot \underbrace{\sin x}_{v} \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{-\cos x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'} \, dx \\
&= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\
&= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \\
&= -\sin x \cos x + \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx \\
&= -\sin x \cos x + x + \tilde{c} - \int \sin^2 x \, dx
\end{aligned}$$

Damit ist

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x + \tilde{c}$$

bzw.

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + c.$$

Übung

Berechnen Sie das Integral $\int \ln x \, dx$ mittels partieller Integration

(Tipp: Wählen Sie $v = \ln x$ und $u' = 1$).

Lösung

$$\begin{aligned}
\int \ln x \, dx &= \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} \, dx \\
&= \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} - \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} \, dx \\
&= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + c.
\end{aligned}$$

Substitution

Auch aus der Kettenregel erhalten wir eine Integrationsformel. Die Ableitung der verketteten Funktion $F(x) = F(g(t))$ mit $x = g(t)$ ergibt nämlich:

$$F'(x) = F'(g(t)) \cdot g'(t).$$

Wenn $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$ ist (d.h. $F'(x) = f(x)$), folgt durch Integration

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx.$$

Die Integrationsregel der Substitution lautet:

$$\boldsymbol{\int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx, \quad x = g(t).}$$

Beispiel zur Substitution

Beispiel
Wir wollen im Folgenden das Integral

$$\int (\ln t)^2 \cdot \frac{1}{t}\, dt$$

mittels Substitution berechnen.

(Da wiederum das Produkt zweier Funktionen zu integrieren ist, könnte man aber evtl. auch mit Hilfe von partieller Integration zum Ergebnis kommen.)

Wir substituieren hier jedoch $x = \ln t$*, übersetzen also gleichermaßen von der „t“-Sprache in die „x“-Sprache. Dass gerade diese Substitution gewählt wird, liegt daran, dass die Ableitung von* $\ln t$*, nämlich* $\frac{1}{t}$*, ebenfalls im Integranden steht: Denn wegen* $x = \ln t$ *folgt für die Ableitung* $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$ *und (indem wir* $\frac{dx}{dt}$ *als Bruch auffassen)* $dx = \frac{1}{t}dt$*.*

Beispiel zur Substitution (Fortsetzung)

Damit liegt folgende Umformung nahe:

$$\int (\ln t)^2 \cdot \frac{1}{t}\,dt = \int x^2\,dx.$$

Das transformierte Integral in x ist einfach zu lösen:

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c.$$

Nun muss noch nach t rücksubstituiert werden:

$$\frac{1}{3}x^3 + c = \frac{1}{3}(\ln t)^3 + c.$$

In der Terminologie der Substitutionsregel ist: $f(x) = x^2$, $g(t) = \ln t$ *und damit*

$$\int \underbrace{(\ln t)^2}_{f(g(t))} \cdot \underbrace{\frac{1}{t}}_{g'(t)}\,dt = \int \underbrace{x^2}_{f(x)}\,dx.$$

Insgesamt haben wir als Ergebnis erhalten:

$$\int (\ln t)^2 \cdot \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}(\ln t)^3 + c.$$

Übung

Berechnen Sie mittels Substitution das Integral $\int \frac{6t}{t^2+3}\,dt$*!*

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned}\int \frac{6t}{t^2+3}\,dt &= 3\int \frac{1}{x}\,dx = 3\ln|x| + c\\ &= 3\ln(t^2+3) + c.\end{aligned}$$

Dabei wurde $x = t^2 + 3$ *und daraus folgend* $\frac{dx}{dt} = 2t$*, d.h.* $dx = 2tdt$ *substituiert.*

In der Terminologie der Substitutionsregel ist: $f(x) = \frac{1}{x}$ *und* $g(t) = t^2 + 3$*.*

Logarithmische Integration

Ein Spezialfall der Substitution, die so genannte *logarithmische Integration*, wird immer dann angewandt, wenn bei einem Bruch als Integranden im Zähler die Ableitung des Nenners steht.

Es gilt allgemein:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \ln|g(x)| + c, \qquad g(x) \neq 0.$$

Beispiel zur Substitution

Beispiel
Das Integral $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, $|x| \leq 1$ *wird unter Zuhilfenahme der Substitution* $x = \sin t$ *bestimmt. Um diese Substitution auszuführen, schreiben wir uns zunächst eine Art „Wörterbuch" zur Übersetzung von der „x"-Sprache in die „t"-Sprache:*

$$\left\{\begin{array}{rcll} x & = & \sin t & \\ x^2 & = & \sin^2 t & \\ 1-x^2 & = & 1-\sin^2 t = \cos^2 t & \\ \sqrt{1-x^2} & = & \cos t & \textit{(Beachte: } \cos t \geq 0) \\ \frac{dx}{dt} & = & \cos t & \textit{also } dx = \cos t\,dt. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Damit erhalten wir folgende Umformung:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \underbrace{\cos t}_{\sqrt{1-x^2}} \cdot \underbrace{\cos t\,dt}_{dx} = \int \cos^2 t\,dt.$$

Beispiel zur Substitution (Fortsetzung)

Wir entnehmen einer Formelsammlung:

$$\int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + c.$$

Wegen $x = \sin t$ *und entsprechend* $t = \arcsin x$ *und obigem „Wörterbuch“ ($*$) erfolgt noch die Rücksubstitution von Termen in* t *in* x*-Ausdrücke:*

$$\frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + c$$

$$= \frac{1}{2}(\underbrace{\arcsin x}_{t} + \underbrace{x}_{\sin t} \cdot \underbrace{\sqrt{1 - x^2}}_{\cos t}) + c.$$

Insgesamt:

$$\int \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x \cdot \sqrt{1 - x^2}\right) + c,$$

für $|x| \leq 1$.

Integrationsregeln (Partielle Integration, Substitution) für bestimmte Integrale

Die Integrationsregeln (Partielle Integration, Substitution) lassen sich nicht nur für unbestimmte, sondern auch für bestimmte Integrale formulieren.

Die Regel der partiellen Integration für bestimmte Integrale lautet dann:

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

$$= u(x) \cdot v(x)|_{x=a}^{b} - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx.$$

Integrationsregeln (Partielle Integration, Substitution) für bestimmte Integrale

Bei der Substitutionsregel muss man auch die Integrationsgrenzen transformieren:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

mit $\alpha = g^{-1}(a)$ und $\beta = g^{-1}(b)$.

Will man diese Transformation der Integralgrenzen (und deren Rücktransformation!) vermeiden, so kann man auch zunächst unbestimmt (d.h. ohne Integrationsgrenzen) integrieren und danach erst in das Ergebnis die Integrationsgrenzen einsetzen.

Ausblick

- Für die Integration rationaler Funktionen gibt es einen eher aufwendigen Algorithmus, genannt *Partialbruchzerlegung*. Grob gesagt kann man rationale Funktionen als Summe gewisser rationaler Funktionen einfachster Bauart (so genannte Partialbrüche) darstellen, deren Stammfunktionen sich relativ einfach ermitteln lassen. Wir verweisen hier auf die Spezialliteratur.

- Es gibt Integrale, die *nicht in geschlossener Form* darstellbar, aber für die Praxis äußerst wichtig sind. Ein Beispiel ist das Integral der Standardnormalverteilung $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt$. Dieses Integral ist in den meisten Formelsammlungen tabelliert. Die Tabelleneinträge sind dabei Näherungswerte, die durch numerische Integrationsmethoden gewonnen wurden.

Uneigentliche Integrale

Man kann den bekannten Integrationsbegriff für stetige Funktionen auf endlichen Intervallen $[a, b]$ auch noch weiter ausdehnen: So genannte *uneigentliche Integrale* treten in zwei Fällen auf, nämlich

- bei unendlichem Integrationsintervall und

- bei unbeschränktem Integranden.

In diesen Fällen ist zusätzlich ein Grenzübergang auszuführen: Der betreffende Limes kann existieren, dann konvergiert das uneigentliche Integral und man kann ihm eine reelle Zahl zuordnen. Andernfalls existiert der entsprechende Grenzwert nicht und das uneigentliche Integral divergiert.

Beispiel für ein uneigentliches Integral

Beispiel

Wir betrachten zunächst das Standardintegral $\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx$ mit fester oberer Grenze $b > 0$:

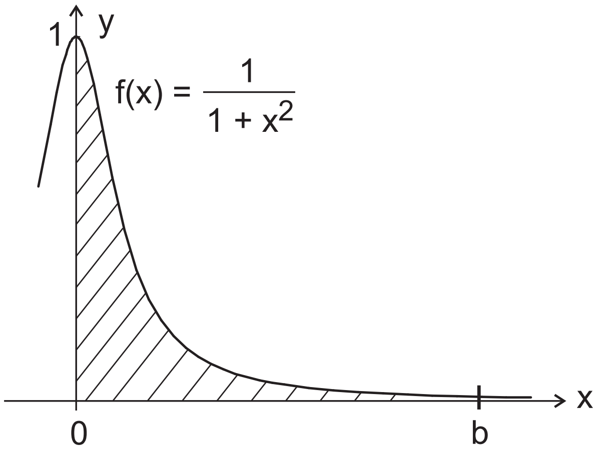
$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x\big|_{x=0}^{b} \\ &= \arctan b - \arctan 0 = \arctan b.\end{aligned}$$

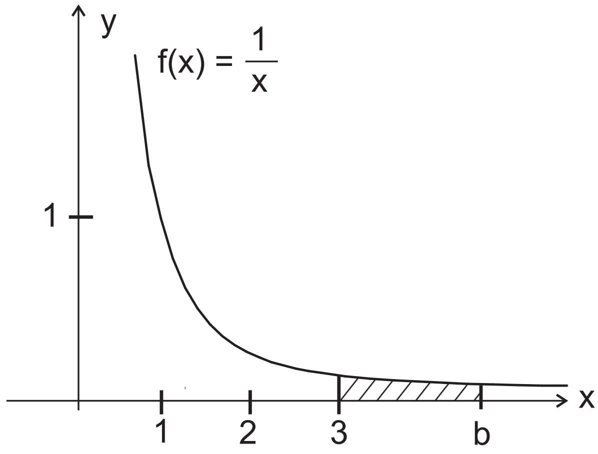
Anschaulich gesprochen ist damit die Fläche unter der Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ über dem Intervall $[0, b]$ berechnet. Wir fragen uns nun, ob auch die (unendlich lange!) Fläche im Intervall $[0, +\infty)$ sinnvoll berechnet werden kann. Dazu liegt die folgende Definition nahe:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\,dx &:= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Wir können — da obiger Grenzwert existiert — der angesprochenen (unendlich langen!) Fläche einen endlichen Wert zuordnen.

Abbildung: Uneigentliche Integrale





Übung

Rechnen Sie das Integral $\int_3^\infty \frac{1}{x}\,dx$ *aus!*

Lösung

Zunächst ist:

$$\int_3^b \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\big|_{x=3}^b = \ln b - \ln 3.$$

Der Grenzwert führt jetzt aber auf Divergenz:

$$\begin{aligned} \int_3^\infty \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_3^b \frac{1}{x}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 3) = +\infty. \end{aligned}$$

Beispiel: Uneigentliche Integrale

Beispiel

Beim Integral $\int_0^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ *ist der Integrand* $\frac{1}{x^2}$ *an der unteren Integrationsgrenze* 0 *unbeschränkt:*

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Wir betrachten zunächst

$$\int_a^2 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg|_{x=a}^{2} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{2}$$

und erhalten nach folgendem Grenzübergang wiederum Divergenz:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{x^2}\,dx &:= \lim_{a \to 0+} \int_a^2 \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \lim_{a \to 0+} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Uneigentliche Integrale
1.Fall

Definition

Bei den uneigentlichen Integralen unterscheiden wir zwei Fälle:
Die Funktion $f(x)$ sei auf jedem Intervall $[a,u]$, $u \in \mathbb{R}$ integrierbar. Dann definiert man

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{u\to\infty} \int_a^u f(x)\,dx,$$

wenn dieser Grenzwert existiert. Man sagt: Das uneigentliche Integral existiert oder konvergiert (andernfalls: Es existiert nicht oder divergiert).

Uneigentliche Integrale
2.Fall

Definition

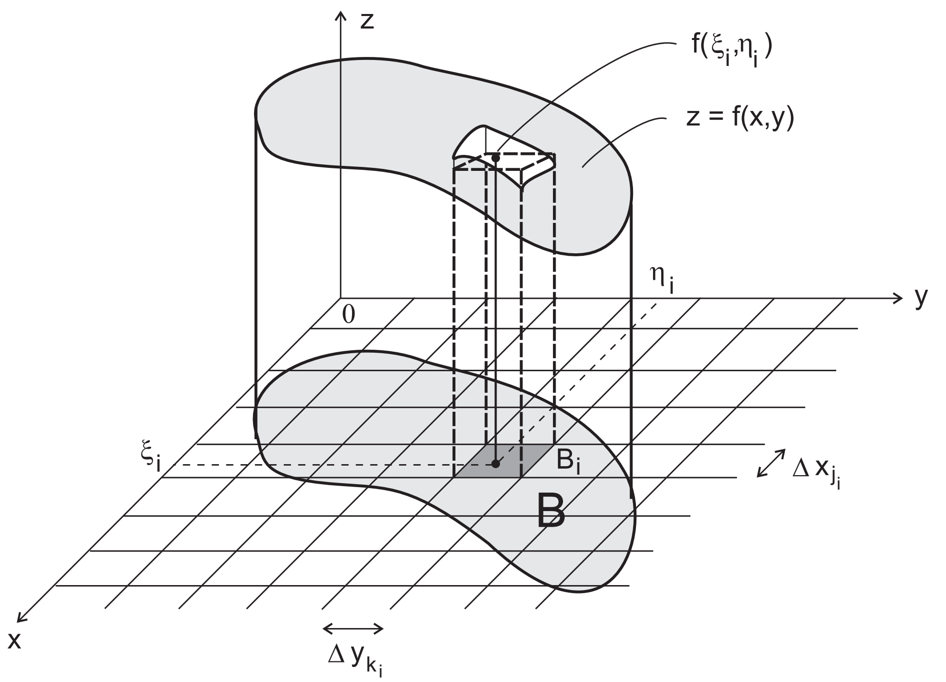
Bei den uneigentlichen Integralen unterscheiden wir zwei Fälle:
Die Funktion $f(x)$ sei auf jedem Intervall $[a, u]$ mit $a \leq u < b$ integrierbar und es gelte: $\lim_{x \to b-} f(x) = \pm\infty$. Dann definiert man

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{u \to b-} \int_a^u f(x)\,dx,$$

wenn dieser Grenzwert existiert. Wiederum sagt man: Das uneigentliche Integral existiert oder konvergiert (andernfalls: Es existiert nicht oder divergiert).

Doppelintegral als Volumen

Wir wollen im Folgenden den Begriff des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ einer Funktion $f(x)$ über einem Intervall $[a,b]$ auf Funktionen in mehreren Variablen verallgemeinern. Dabei sollen — der Anschaulichkeit halber — Funktionen von zwei Veränderlichen $f(x,y)$ betrachtet werden. Gesucht ist hier das *Volumen* zwischen der Funktion und der x,y-Ebene über einem *Bereich* $\mathcal{B}$.



Bereichsintegral (Gebietsintegral)

Wir nennen gewisse einfach zu charakterisierende Mengen der Ebene „Bereiche“ und halten fest:

Definition

Unter dem Bereichsintegral (oder Gebietsintegral) der Funktion $f(x, y)$ über dem Bereich $\mathcal{B}$ (Konvergenz vorausgesetzt) versteht man

$$\iint_{\mathcal{B}} f(x, y)\, dx\, dy :=$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_{j_i} \Delta y_{k_i}.$$

Rechenregeln für das Bereichsintegral

Für das Bereichsintegral gilt:

a) $\iint_{\mathcal{B}} \alpha \cdot f \, dx \, dy = \alpha \cdot \iint_{\mathcal{B}} f \, dx \, dy,$

b) $\iint_{\mathcal{B}} (f + g) \, dx \, dy$
$= \iint_{\mathcal{B}} f \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{B}} g \, dx \, dy,$

c) $\iint_{\mathcal{B}} f \, dx \, dy$
$= \iint_{\mathcal{B}_1} f \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{B}_2} f \, dx \, dy,$
falls $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$
und $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ **höchstens Randpunkte gemeinsam haben.**

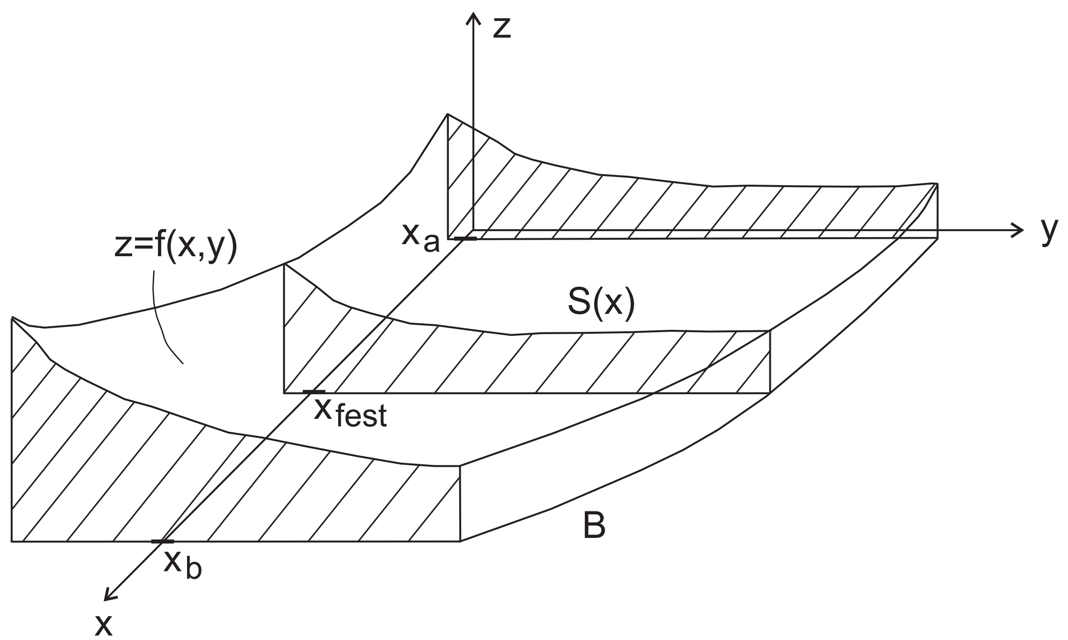
Bemerkungen zu den Rechenregeln für das Bereichsintegral

- Der Ausdruck $\iint_{\mathcal{B}} 1 \, dx \, dy$ gibt den Flächeninhalt von $\mathcal{B}$ an. Analog war $\int_a^b 1 \, dx = b - a$ die Länge des Intervalls $[a, b]$.

- Für $f(x, y) \geq 0$ gehen Volumina *positiv* in $\iint_{\mathcal{B}} f(x, y) \, dx \, dx$ ein und entsprechend negativ für $f < 0$. Analog wurde der Flächeninhalt $\int_a^b f(x) \, dx$ im Intervall $[a, b]$ für $f \geq 0$ positiv gemessen und für $f < 0$ negativ.

Grundidee zur Berechnung von Mehrfachintegralen

Man berechnet das Gesamtvolumen als Summe hauchdünner Scheiben mit *bekannter Querschnittsfläche*, quasi als hätte man einen Holzklotz (das zu berechnende Volumen) in kleine zueinander parallele Scheibchen zerhackt. Die einzelnen Scheiben können dabei durchaus verschieden aussehen, je nachdem an welcher Stelle man sie herausgegriffen hat:



Grundidee zur Berechnung von Mehrfachintegralen

Das Bereichsintegral $\iint_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dx$ kann als Summe, oder besser gleich als Integral kleiner Scheiben $S(x)$ geschrieben werden, wobei derartige Scheiben für $x \in [x_a, x_b]$ auftreten und je nach gewähltem x verschiedene Gestalt haben können:

$$\iint_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dx = \int_{x_a}^{x_b} S(x)\,dx.$$

Die einzelnen Scheiben können wiederum als *Einfachintegrale* aufgefasst werden:

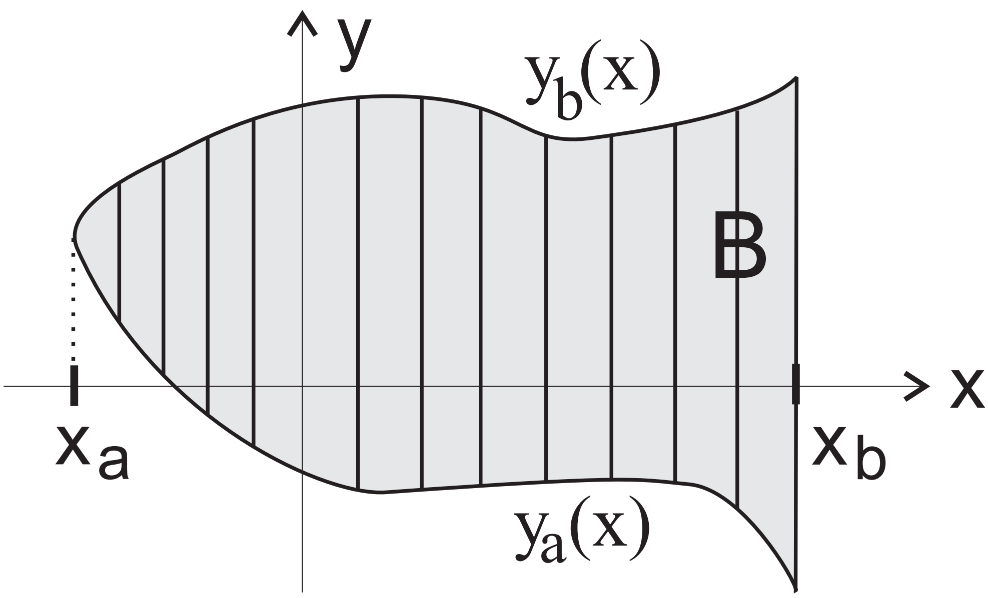
$$S(x) = \int_{y_a(x)}^{y_b(x)} f(x,y)\,dy.$$

Insgesamt wird dadurch das Doppelintegral $\iint_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dx$ in *zwei ineinander verschachtelte Einzelintegrale* aufgespalten. Dabei ist das *innere Integral zuerst* zu berechnen.

Normalbereich (in x)

Ein Integrationsbereich $\mathcal{B}$ lässt sich als so genannter *Normalbereich* beschreiben durch:

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \,|\, x_a \leq x \leq x_b,\ y_a(x) \leq y \leq y_b(x)\}\,.$$

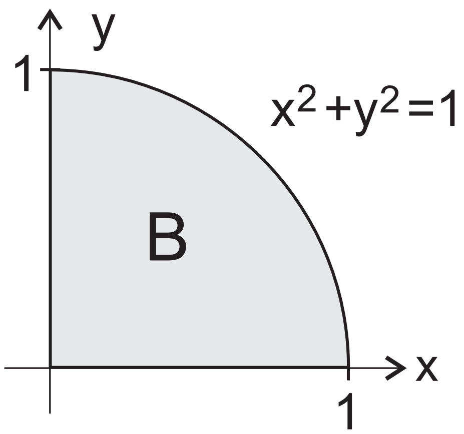


Beispiel

Wir beschreiben das Viertel des Einheitskreises im $1.$ *Quadranten (vgl. Abb.) in der angegebenen Weise als Normalbereich:*

$$\mathcal{B} = \left\{ (x,y) \,|\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}.$$

Die obere Grenze $y_b(x)$ *haben wir durch Auflösen der Kreisgleichung* $x^2 + y^2 = 1^2$ *nach* y *erhalten:* $y = \sqrt{1-x^2}$*.*



Berechnung von Bereichsintegralen bei Normalbereich in x, inneres Integral in y

Bei einem Normalbereich in x

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \,|\, \boldsymbol{x_a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x_b}, \quad \boldsymbol{y_a(x)} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{y_b(x)}\}$$

berechnen wir Bereichsintegrale in der Form

$$\iint_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} \boldsymbol{f(x,y)\,dx\,dy} = \int_{\boldsymbol{x=x_a}}^{\boldsymbol{x_b}} \left(\int_{\boldsymbol{y=y_a(x)}}^{\boldsymbol{y_b(x)}} \boldsymbol{f(x,y)\,dy} \right) \boldsymbol{dx}.$$

Es lassen sich die Rollen von x und y bei entsprechend vorliegendem Bereich natürlich auch vertauschen (man kann Holzklötze nicht nur in x-Richtung, sondern auch in y-Richtung zerhacken, ohne dass sich das Volumen des Holzklotzes verändern würde).

Berechnung von Bereichsintegralen bei Normalbereich in y, inneres Integral in x

Bei einem Normalbereich in y

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \,|\, y_a \leq y \leq y_b,$$

$$x_a(y) \leq x \leq x_b(y)\}$$

berechnen wir Bereichsintegrale in der Form

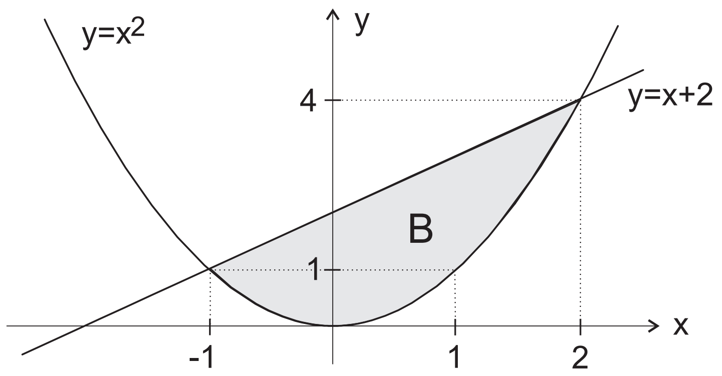
$$\iint_{\mathcal{B}} f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$\int_{y=y_a}^{y_b} \left(\int_{x=x_a(y)}^{x_b(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Beispiel für die Berechnung von Bereichsintegralen

Beispiel

Wir betrachten den durch die Kurven $y = x^2$ und $y = x + 2$ berandeten Bereich $\mathcal{B}$:



Da sich $\mathcal{B}$ sowohl als Normalbereich in x als auch als Normalbereich in y auffassen lässt, berechnen wir nun das Integral $\iint_{\mathcal{B}} xy\, dx\, dy$ auf beide Arten.

Fortsetzung: Beispiel für die Berechnung von Bereichsintegralen

Falls das äußere Integral über x und das innere Integral über y läuft, gilt:

$$\iint_{\mathcal{B}} xy\,dx\,dy = \int_{x=-1}^{2} \left(\int_{y=x^2}^{x+2} xy\,dy \right) dx.$$

Das innere Integral berechnet sich dann zu

$$\int_{y=x^2}^{x+2} xy\,dy = \left.\frac{xy^2}{2}\right|_{y=x^2}^{x+2} = \frac{x(x+2)^2}{2} - \frac{x(x^2)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^3 + 4x^2 + 4x - x^5\right).$$

Damit ergibt sich insgesamt:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{2} \left(x^3 + 4x^2 + 4x - x^5\right) dx = \frac{1}{2}\left(12 - \frac{3}{4}\right)$$

$$= 5.625.$$

Fortsetzung: Beispiel für die Berechnung von Bereichsintegralen

Falls das äußere Integral über y läuft und das innere Integral über x, so ist zunächst zu beachten, dass es in zwei Teilbereiche zerfällt: nämlich den Teilbereich mit $y \in [0,1]$ und den Teilbereich mit $y \in [1,4]$:

$$\int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xy\,dx \right) dy$$

$$+ \int_{y=1}^{4} \left(\int_{x=y-2}^{\sqrt{y}} xy\,dx \right) dy.$$

Für das erste Integral erhalten wir den Wert 0, da in $\int_{x=-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xy\,dx$ eine ungerade Funktion x über ein symmetrisches Intervall $[-\sqrt{y}, \sqrt{y}]$ integriert wird.

Fortsetzung: Beispiel für die Berechnung von Bereichsintegralen

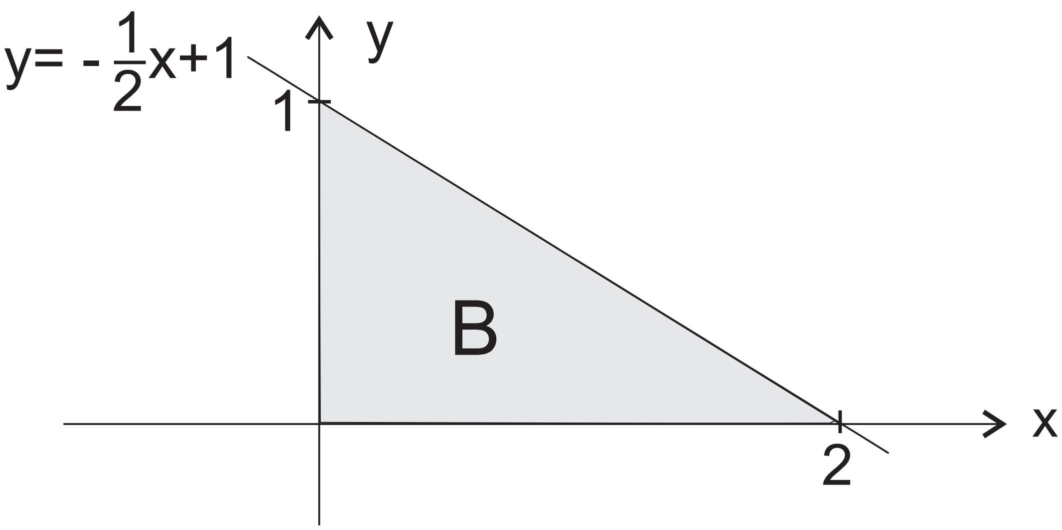
Das zweite Integral ergibt:

$$\int_{y=1}^{4}\left(\int_{x=y-2}^{\sqrt{y}} xy\,dx\right)dy = \int_{1}^{4} \left.\frac{x^2y}{2}\right|_{x=y-2}^{\sqrt{y}} dy$$
$$= \int_{1}^{4}\left(\frac{(\sqrt{y})^2y}{2} - \frac{(y-2)^2y}{2}\right)dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_{1}^{4}(y^2-(y^3-4y^2+4y))dy$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{32}{3}-\left(-\frac{7}{12}\right)\right) = 5.625.$$

Übung: Berechnung von Bereichsintegralen

Übung

Berechnen Sie für den durch die Kurven $x = 0$, $y = 0$ und $y = -1/2\,x + 1$ berandeten Bereich $\mathcal{B}$ das Bereichsintegral $\iint_{\mathcal{B}} x\,dx\,dy$.



Lösung zur Übung: Berechnung von Bereichsintegralen

Lösung

Für die Integrationsreihenfolge „außen x, innen y“ erhalten wir:

$$\iint_{\mathcal{B}} x\,dx\,dy = \int_{x=0}^{2} \left(\int_{y=0}^{-1/2\,x+1} x\,dy \right) dx.$$

Das innere Integral berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{-1/2\,x+1} x\,dy &= xy|_{y=0}^{-1/2\,x+1} = x\left(-\tfrac{1}{2}x+1\right) \\ &= -\tfrac{1}{2}x^2 + x. \end{aligned}$$

Damit insgesamt:

$$\iint_{\mathcal{B}} x\,dx\,dy = \int_{x=0}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + x \right) dx = \frac{2}{3}.$$

Lösung zur Übung: Berechnung von Bereichsintegralen (Fortsetzung)

Die andere Integrationsreihenfolge liefert *(*$y = -1/2\,x + 1$ *nach* x *aufgelöst ergibt* $x = -2y + 2$*):*

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{B}} x\,dx\,dy &= \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=0}^{-2y+2} x\,dx \right) dy \\
&= \int_{y=0}^{1} \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{-2y+2} dy \\
&= 2\int_{y=0}^{1} (1-y)^2 dy \\
&= -\frac{2}{3}(1-y)^3\Big|_{y=0}^{1} \\
&= 0 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Lösung zur Übung: Berechnung von Bereichsintegralen

Der in der Übung berechnete x-Wert hat eine anschauliche Bedeutung: Er gibt die x-Koordinate des geometrischen Schwerpunktes vom Bereich $\mathcal{B}$ an:

$$x_s = \frac{1}{A} \iint_{\mathcal{B}} x \, dx \, dy$$

mit Fläche $A = \iint_{\mathcal{B}} 1 \, dx \, dy$ (in der Übung: $A = 1$).

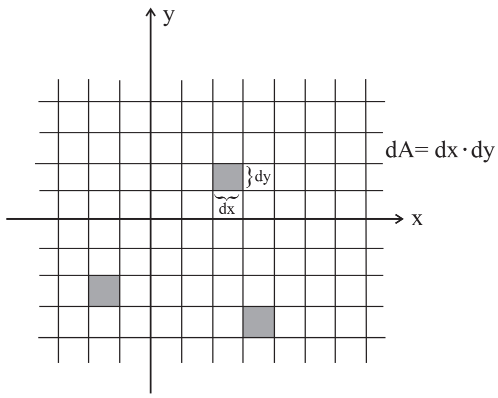
Die Berechnung derartiger Schwerpunkte, Massenmittelpunkte, Flächenträgheitsmomente etc. ist eine typische Anwendung von Bereichsintegralen.

Dreifachintegrale

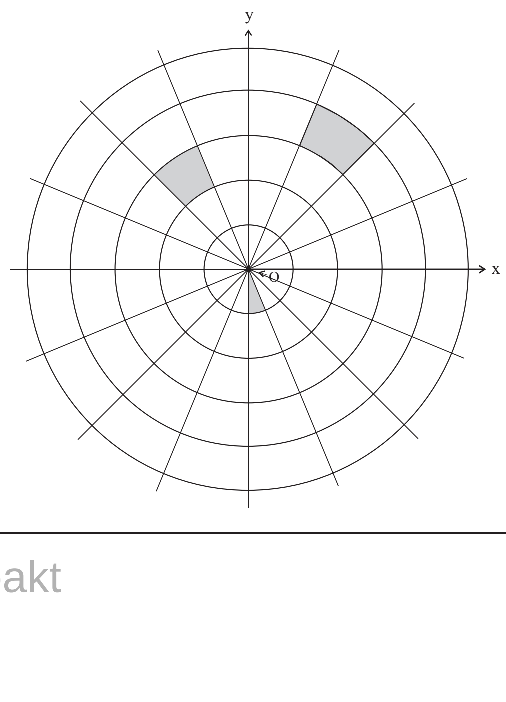
Bei der Definition von Bereichsintegralen haben wir uns wesentlich vom geometrisch anschaulichen Begriff „Volumen“ leiten lassen. Um zu allgemeinen Dreifach- bzw. Mehrfachintegralen zu gelangen, ist dieser geometrische Weg nicht länger möglich. Die Definition der Bereichsintegrale kann aber fast wörtlich (um die dritte Dimension oder weitere Dimensionen erweitert) übernommen werden. Auch Dreifachintegrale haben vielfältige praktische Anwendungen, wie etwa die Berechnung der Gesamtmasse eines Körpers bei nicht-konstanter Massendichte etc.

Kartesische Koordinaten oder Polarkoordinaten

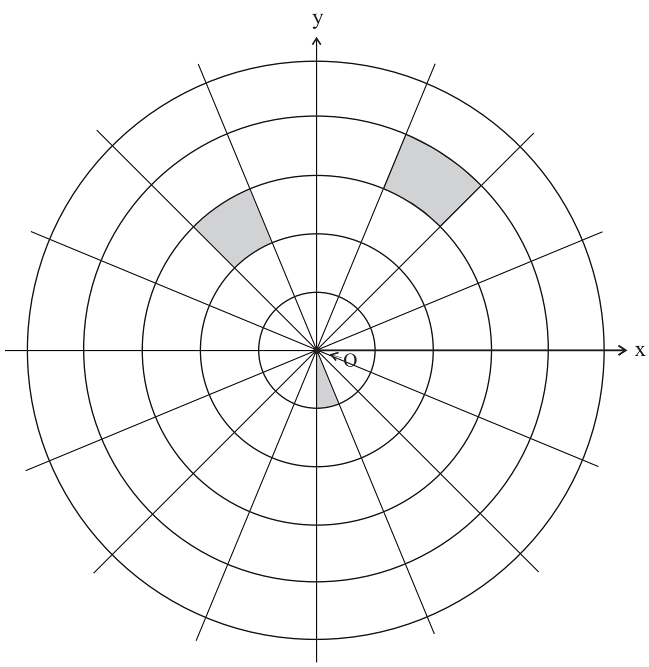
Bei manchen Doppelintegralen vereinfacht sich die Berechnung, wenn man nicht kartesische Koordinaten verwendet:



sondern dem Problem besser angepasste Integrationsvariable, wie etwa Polarkoordinaten:

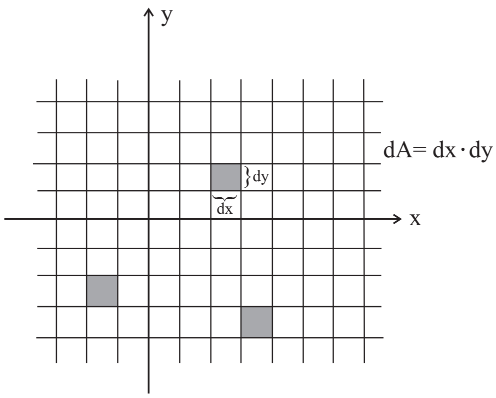


Bei Polarkoordinaten sind die Koordinatenlinien für festes r konzentrische Kreise um den Nullpunkt, die Koordinatenlinien für konstantes φ sind Halbgeraden, die vom Koordinatenursprung ausgehen.

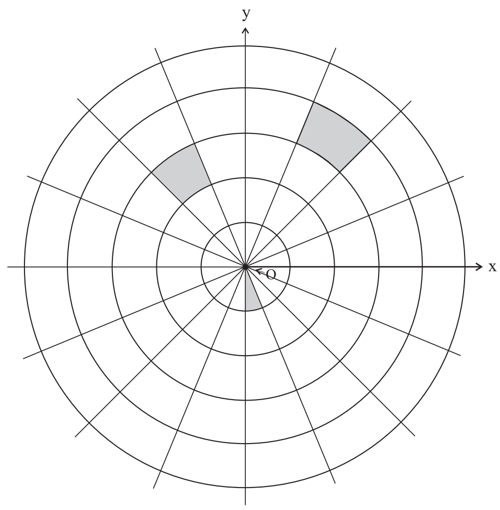


Es existiert ein wichtiger Unterschied zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten.

Das Flächenelement bei kartesischen Koordinaten ist mit $dA = dx \cdot dy$ überall gleich groß:

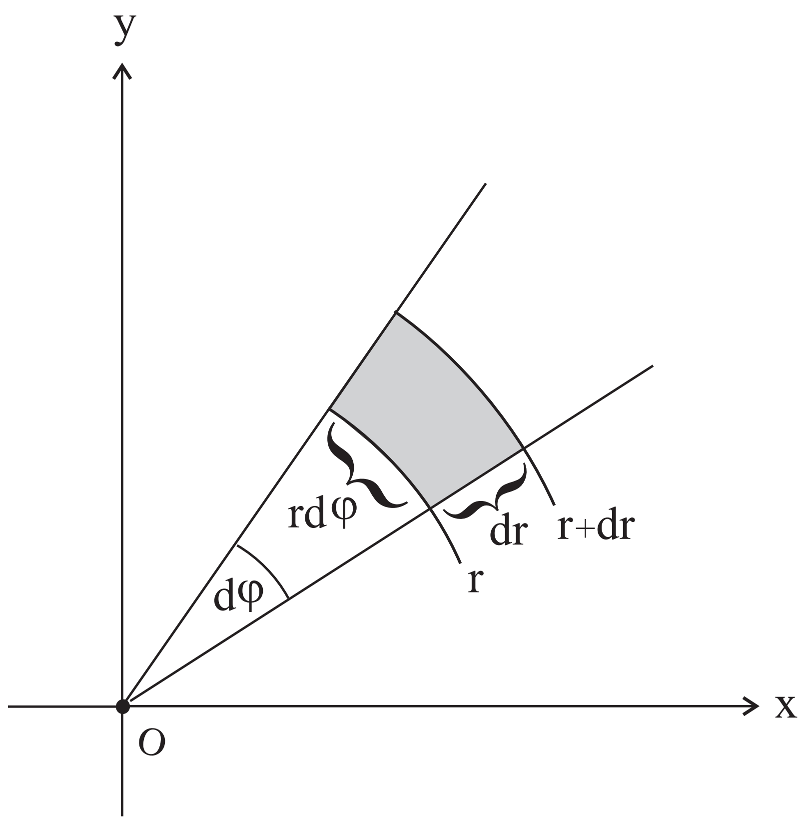


Das Flächenelement in Polarkoordinaten hängt offensichtlich von r ab:



Das Flächenelement in Polarkoordinaten lautet:

$$\boldsymbol{dA = r\ dr\ d\varphi.}$$



Bei der Berechnung eines Integrals in Polarkoordinaten geht man wie folgt vor:

Zunächst transformiert man die kartesischen Koordinaten x und y sowie das Flächenelement dA in Polarkoordinaten. Dabei gelten die folgenden Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \\ y &= r \cdot \sin\varphi \\ dA &= r \cdot dr \cdot d\varphi. \end{aligned}$$

Nun sind die Grenzen des Integrationsbereichs in Polarkoordinaten anzugeben:

$$\int\int_A f(x,y)dA = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r=r_a(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r dr d\varphi.$$

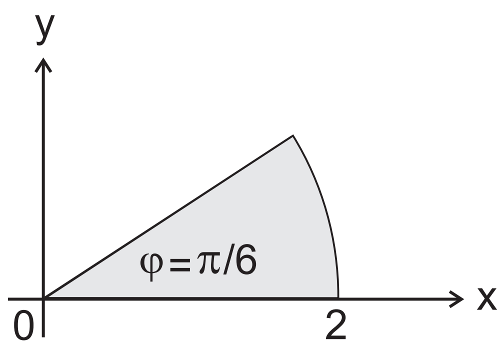
Natürlich kann man bei Polarkoordinaten - wie schon bei kartesischen Koordinaten - die Integrationsreihenfolge vertauschen:

Will man zuerst (inneres Integral) nach φ integrieren, so wähle man die Grenzen wie folgt

$$\int\int_A f(x,y)dA = \int_{r=r_1}^{r_2}\int_{\varphi=\varphi_i(r)}^{\varphi_a(r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot d\varphi r dr.$$

Beispiel

Wir berechnen im Folgenden die Fläche des Tortenstücks A:



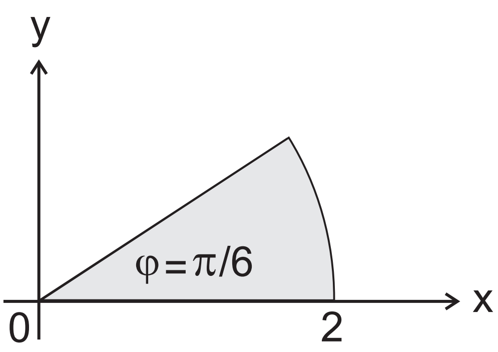
$$\int\int_A 1\ dA = \int_{\varphi=0}^{\pi/6}\int_{r=0}^{2} 1\cdot r dr d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/6}\left(\int_{r=0}^{2} r dr\right) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi/6}\left(\left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=0}^{2}\right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/6} 2 d\varphi = 2\ \varphi|_{\varphi=0}^{\pi/6} = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Übung

Berechnen Sie das Doppelintegral $\int\int_A xy^2 dA$ über das Tortenstücks A.



Lösung

$$\int\int_A xy^2\, dA = \int_{\varphi=0}^{\pi/6}\int_{r=0}^{2} \underbrace{r\cos\varphi}_{=x} \cdot \underbrace{(r\sin\varphi)^2}_{=y^2} \cdot \underbrace{r dr d\varphi}_{dA}$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/6}\left(\int_{r=0}^{2} r^4 dr\right)\cos\varphi\ \sin^2\varphi\ d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/6}\left(\left.\frac{r^5}{5}\right|_{r=0}^{2}\right)\cos\varphi\ \sin^2\varphi\ d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/6}\left(\frac{2^5}{5}\right)\cos\varphi\ \sin^2\varphi\ d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/6} \left(\frac{2^5}{5}\right) \cos\varphi \ \sin^2\varphi \, d\varphi$$

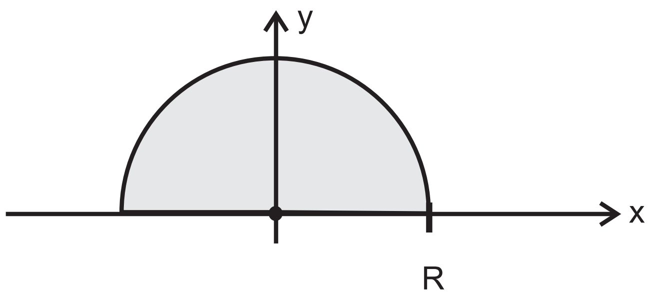
$$= \frac{2^5}{5} \cdot \frac{1}{3} \sin^3\varphi \Big|_{\varphi=0}^{\pi/6}$$

$$= \frac{2^5}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin^3 \frac{\pi}{6}$$

$$\approx 0.26667$$

Übung

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Halbkreises ($y \geq 0$) mit dem Radius R.



(Aus Symmetriegründen gilt: $x_S = 0$.)

Lösung

Die Fläche des Halbkreises vom Radius R berechnet sich (wie erwartet) zu:

$$A = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{R} r dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi} \left(\int_{r=0}^{R} r dr \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi} \left(\left. \frac{r^2}{2} \right|_{r=0}^{R} \right) d\varphi$$

$$= \frac{R^2}{2} \cdot \varphi|_{\varphi=0}^{\pi} = \frac{R^2 \pi}{2}$$

Für die y-Koordinate des Schwerpunkts erhält man:

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{R} \underbrace{r \sin \varphi}_{=y} \cdot \underbrace{r dr d\varphi}_{dA}$$

$$= \frac{2}{R^2 \pi} \cdot \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \left(\int_{r=0}^{R} r^2 dr \right) \sin \varphi \; d\varphi \right)$$

$$= \frac{2}{R^2 \pi} \cdot \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \left(\frac{r^3}{3} \bigg|_{r=0}^{R} \right) \sin \varphi \; d\varphi \right)$$

$$= \frac{2}{R^2 \pi} \cdot \frac{R^3}{3} \cdot \left((-\cos \varphi)|_{\varphi=0}^{\pi} \right)$$

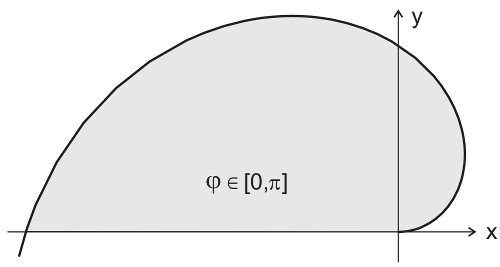
$$= \frac{2}{R^2 \pi} \cdot \frac{R^3}{3} \cdot (-(-1) - (-1))$$

$$= \frac{4}{3\pi} \cdot R$$

Beispiel

Wir berechnen im Folgenden einen Teil der Fläche einer Archimedischen Spirale:

$$r = \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi]$$



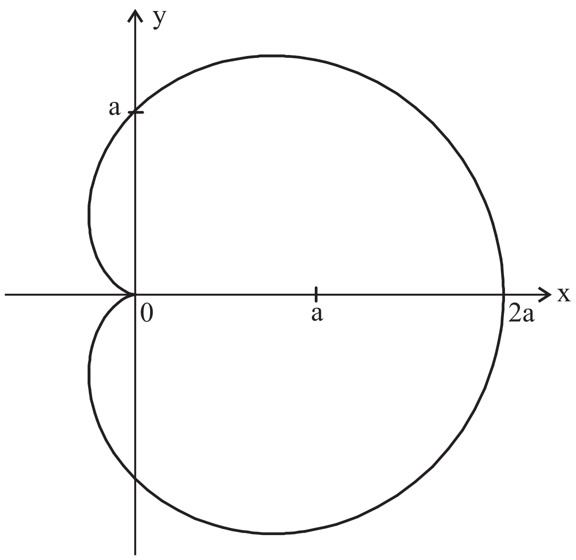
$$A = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{\varphi} r dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi} \left(\left. \frac{r^2}{2} \right|_{r=0}^{\varphi} \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\varphi^2}{2} d\varphi = \left. \frac{\varphi^3}{6} \right|_{\varphi=0}^{\pi} = \frac{\pi^3}{6}$$

Übung

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Kardioide:

$$r = a \cdot (1 + \cos\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$



Lösung

$$A = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} \Bigg|_{r=0}^{a(1+\cos\varphi)} \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} (a(1+\cos\varphi))^2 d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{a^2}{2} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi$$

$$A = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{a^2}{2}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi$$

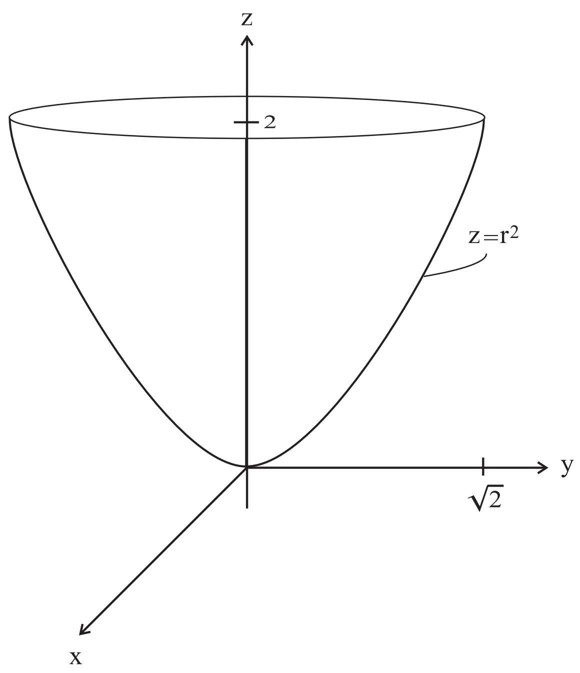
$$= \frac{a^2}{2}\left(\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right)\Bigg|_{\varphi=0}^{2\pi}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\left(2\pi + 0 + \frac{1}{2}2\pi + 0\right) - (0 + 0 + 0 + 0)\right)$$

$$= \frac{3\pi a^2}{2}$$

Übung

Berechnen Sie das Dreifachintegral $\int\int\int_V 1\ dV$ *über folgendes Volumen* V*:*



(Die Koordinaten r*,* φ *und* z *heißen* **Zylinderkoordinaten***.)*

Lösung

$$V = \int\int\int_V 1 \; dV = \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \int_{z=r^2}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r dr d\varphi dz$$

$$= \left(\int_{r=0}^{\sqrt{2}} r \underbrace{\left(\int_{z=r^2}^{2} dz \right)}_{= z|_{z=r^2}^{2} = 2 - r^2} dr \right) \cdot \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right)$$

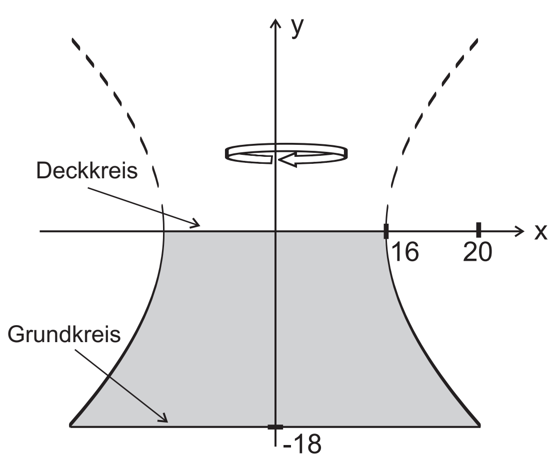
$$= \int_{r=0}^{\sqrt{2}} r(2 - r^2) dr \cdot 2\pi$$

$$= 2\pi \left(r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_{r=0}^{\sqrt{2}} = 2\pi \left(2 - \frac{4}{4} \right) = 2\pi$$

Fragestellung

Nicht nur die Flugbahnen vieler kosmischer Körper sind Hyperbeln, auch im Bauwesen können z.B. Kühltürme von Kernkraftwerken als Rotationshyperboloide aufgefasst werden.

Man erhält einen derartigen Körper, wenn man eine Hyperbel um die y-Achse rotieren lässt. Wir betrachten hier einen Kühlturm mit den Maßen aus folgender Abb: Grundkreisradius 20m, Deckkreisradius 16m, Höhe 18m. Sein Volumen ist unter Zuhilfenahme der Überlegungen aus der Integralrechnung von Funktionen in zwei Veränderlichen leicht zu berechnen.



Hyperbelgleichungen

Zunächst müssen in der Gleichung einer Hyperbel, allgemein

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

die Parameter a und b bestimmt werden. Da die Punkte $(16, 0)$ und $(20, 18)$ auf der gesuchten Hyperbel liegen, erhalten wir die Bestimmungsgleichungen

$$\frac{16^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1 \quad \Longrightarrow a = 16,$$

$$\frac{20^2}{16^2} - \frac{18^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow b^2 = \frac{18^2 \cdot 16^2}{12^2}$$

$$\Longrightarrow b = \frac{18 \cdot 16}{12} = 24.$$

Insgesamt ist also $\frac{x^2}{16^2} - \frac{y^2}{24^2} = 1$ die Gleichung der Hyperbel, bzw. nach x^2 aufgelöst:

$$x^2 = 16^2 \cdot \left(1 + \frac{y^2}{24^2}\right).$$

Kreisscheiben

Wir stellen uns nun den Kühlturm in (dünne) Kreisscheiben um die y-Achse zerlegt vor. Jede dieser Kreisscheiben hat den Radius $x = x(y)$, der noch von y (der jeweiligen Höhe, an der die Kreisscheibe gemessen wird) abhängt.

Die Fläche eines Kreises mit dem Radius r beträgt bekanntlich $\pi \cdot r^2$; in unserem Fall hat jeder Kreis die Fläche

$$A(y) = \pi \cdot x^2(y) = 16^2\pi \left(1 + \frac{y^2}{24^2}\right).$$

Dabei haben wir die obige Formel (für x^2 aus der Hyperbelgleichung) eingesetzt.

Summation über die Kreisscheiben

Wenn wir nun noch über alle (dünnen) Scheiben $A(y)$ aufsummieren bzw. integrieren, gibt sich für das Volumen V des aus vielen Scheiben bestehenden Rotationshyperboloids:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-18}^{0} A(y)dy = 16^2 \cdot \pi \int_{-18}^{0} \left(1 + \frac{y^2}{24^2}\right) dy \\ &= 16^2 \cdot \pi \left(y + \frac{y^3}{3 \cdot 24^2}\right)\Big|_{y=-18}^{0} \\ &= 16^2 \pi (18 + 3.375) = 5472\pi. \end{aligned}$$

Insgesamt beträt also das Volumen des betrachteten Kühlturms etwa $17191 m^3$ oder über 17 Millionen Liter.

Fragestellung

Besonders in Deutschland wird auf den Autobahnen mit recht hoher Geschwindigkeit gefahren. Ein großes Gefahrenpotenzial bilden dabei Kurven und Ausfahrten, da die Straßenführung an diesen Stellen meist einen Kreisbogen beinhaltet. Dieser Bogen hat, anders als eine Gerade, eine *Krümmung* $K \neq 0$, die dafür verantwortlich ist, dass ein Fahrzeug mit zu hoher Geschwindigkeit aus der Kurve fliegt. Das liegt wiederum daran, dass die am Fahrzeug angreifende Zentrifugalkraft F — wie aus der Kinetik bekannt — proportional zur *Krümmung* K ist, genauer $F = Kmv^2$ (m Masse des Autos und v seine Geschwindigkeit).

Wegbeschreibung

Bekannterweise beschreibt der Physiker einen Weg in der Ebene (hier: die Straßenführung) durch dessen Koordinaten:

$$x(s), y(s),$$

wobei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

Würde man beispielsweise $x(s) = s$ und $y(s) = s$ für $s \geq 0$ setzen, so gilt für alle s stets $y = x$. In diesem Fall ergäbe sich als Weg also die Winkelhalbierende des ersten Quadranten.

Klothoide

Wenn man nun eine Kurve ohne einen so genannten *Übergangsbogen* direkt aus der Geraden (mit Krümmung $K = 0$) einleiten würde, hätte das zur Folge, dass beim Durchfahren der Kurve ganz plötzlich die Krümmung von 0 auf einen von Null verschiedenen Wert springen würde (Unstetigkeit!). Aus Sicherheitsgründen benutzt man deswegen im Straßenbau als Übergangsbogen die so genannte *Klothoide*. Deren „Weg" wird durch die Integrale

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \cos\left(\pi \frac{u^2}{2}\right)\, du, \\ y(s) &= \int_0^s \sin\left(\pi \frac{u^2}{2}\right)\, du \end{aligned}$$

beschrieben.

Klothoide

Bei Funktionen in einer Veränderlichen wird die zweite Ableitung als ein Maß für das Krümmungsverhalten gesehen. Auch die Krümmung $K(s)$ eines durch $x(s)$, $y(s)$ beschriebenen Weges kann man messen. In fast jeder Formelsammlung findet man hier die Formel (1. und 2. Ableitung werden üblicherweise mit Punkten bezeichnet, z.B. $\dot{x}(s), \ddot{x}(s)$):

$$K(s) = \frac{\dot{x}(s)\ddot{y}(s) - \ddot{x}(s)\dot{y}(s)}{(\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s))^{3/2}}.$$

Krümmung der Klothoide

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt nun, dass gilt:

$$\dot{x}(s) = \cos\left(\pi\frac{s^2}{2}\right) \quad \text{und} \quad \dot{y}(s) = \sin\left(\pi\frac{s^2}{2}\right).$$

Damit ergibt sich für den Nenner $(\dot{x}^2(s)+\dot{y}^2(s))^{3/2}$

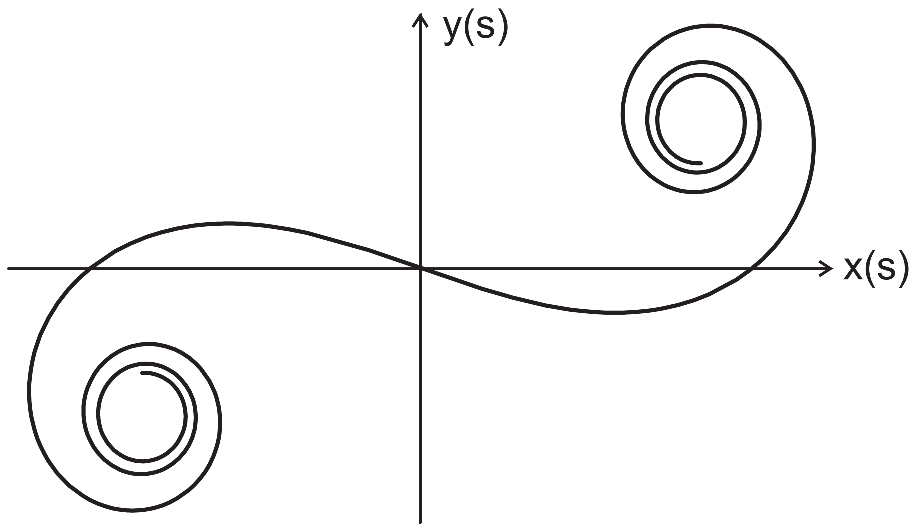
$$\left[\cos^2\left(\pi\frac{s^2}{2}\right) + \sin^2\left(\pi\frac{s^2}{2}\right)\right]^{3/2} = 1.$$

Wegen $\ddot{x}(s) = -\pi s \sin\left(\pi\frac{s^2}{2}\right)$ und $\ddot{y}(s) = \pi s \cos\left(\pi\frac{s^2}{2}\right)$ folgt schließlich

$$K(s) = \pi s\left[\cos^2\left(\pi\frac{s^2}{2}\right) + \sin^2\left(\pi\frac{s^2}{2}\right)\right] = \pi s.$$

Krümmung der Klothoide

Die Krümmung der Klothoide beginnt also bei $K = 0$ (für $s = 0$) und nimmt absolut gesehen stetig zu. Die Kurve hat in jedem beliebigen Punkt eine andere Krümmung.



Trassierung von Straßen mittels Klothoiden

Die Trassierung einer Straße mit der Elementfolge Klothoide — Kreisbogen — Klothoide ist damit recht einfach durchführbar. Man nimmt einen Klothoidenteil (beginnend bei $s = 0$) solange, bis er die (konstante) Krümmung des Kreisbogens erreicht hat. Ans Ende des Kreisbogen setzt man dann das entsprechend „umgekehrte“ Klothoidenteil. Dadurch steigt die Zentrifugalkraft von Null linear bis auf den Kreisbahnwert an, bliebt dann konstant und nimmt nach Verlassen der Kreisbahn wieder linear auf Null ab. Auf diese Weise trägt hier die Mathematik ihren Teil zum stressfreien Beherrschen von Fahrzeugen vor und hinter Kurven auch bei lebhaftem Verkehr bei.

Fresnelsche Integrale

Die beiden Integrale nennt man übrigens *Fresnelsche Integrale*. Sie sind nicht analytisch lösbar, die Straßenbauingenieure müssen also mit Tafelwerken (numerische Integration!) arbeiten. Exakt berechenbar — wenn auch nicht mit unseren Mitteln — ist lediglich der Wert der uneigentlichen Integrale:

$$\int_0^\infty \cos\left(\pi\frac{u^2}{2}\right)\,du = \int_0^\infty \sin\left(\pi\frac{u^2}{2}\right)\,du = \frac{1}{2}.$$

Man erkennt, dass der Faktor π in den Integralen nicht bloße Willkür ist, sondern aus Normierungsgründen gewählt wurde.