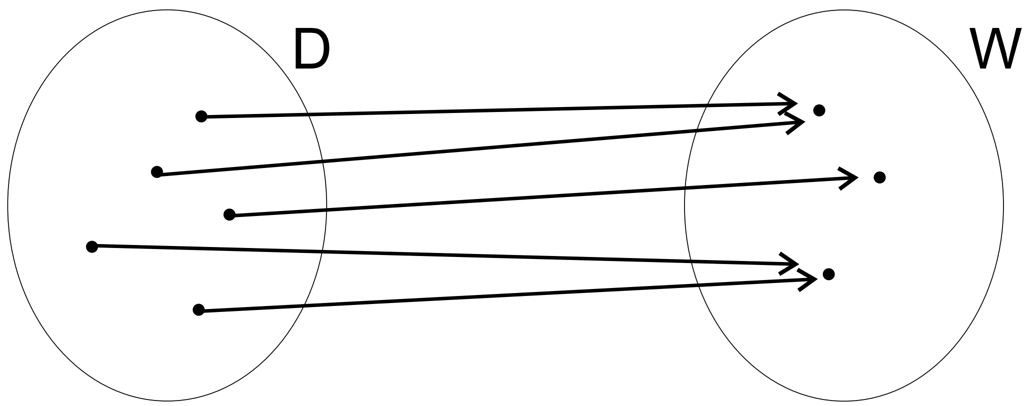
Kapitel 3

Funktionen

- Grundbegriffe
- Grenzwerte bei Funktionen
- Stetigkeit
- Die elementaren Funktionen
- Anwendungen

Funktionen und ihre Darstellung

Unter einer *Abbildung* von einer Menge D in eine Menge W versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x von D genau ein Element y von W zuordnet.



Statt Abbildung sagt man auch *Funktion*, besonders dann, wenn D und W Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, sind. Der Funktionsbegriff spielt eine wichtige Rolle bei der quantitativen Beschreibung der Umwelt.

Beispiel

a) *Fährt ein Auto mit konstanter Geschwindigkeit v einen gewissen Zeitraum t, so erhält man die zurückgelegte Wegstrecke durch die einfache Funktionsvorschrift „Ordne t (Zeit in Sekunden) den Weg (in Metern) $v \cdot t$ zu". Man hat also eine Abbildung von* $[0, \infty)$ *in* $[0, \infty)$.

b) *Der Kurs k einer Aktie verändert sich im Zeitablauf ständig. Die Gewinnschätzung g pro Aktie ist dagegen in der Regel für einen längeren Zeitraum (z.B. Quartal) konstant. Eine wichtige Kenngröße zur Beurteilung einer Aktie ist daher das sog.* Kurs-Gewinn-Verhältnis *(KGV): KGV*$(k) = \frac{k}{g}$.

Reelle Funktion

Definition

Eine reelle Funktion f ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ genau ein Element $y \in W \subseteq \mathbb{R}$ zuordnet. Man schreibt dafür

$$x \mapsto y = f(x) \quad \textbf{oder} \quad f : D \to W.$$

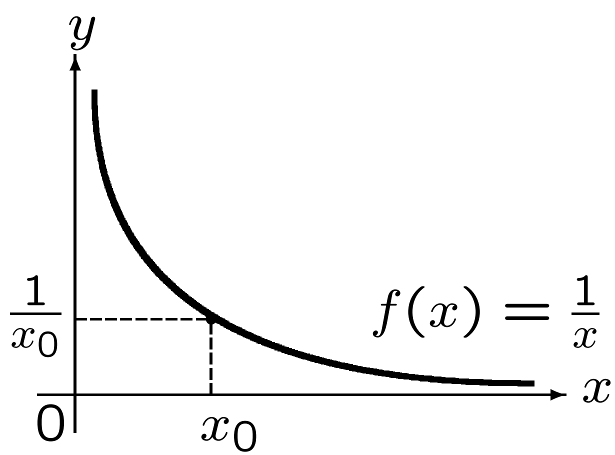
D heißt Definitionsbereich, W nennt man Wertebereich ($\hat{=}$ Menge der Funktionswerte $f(x)$, wenn x den Definitionsbereich D durchläuft). x wird als Argument, unabhängige Variable oder Veränderliche bezeichnet, y als abhängige Variable oder Veränderliche. $f(x_0)$ heißt Funktionswert an der Stelle x_0 oder Bild von x_0.

Beispiel

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ *für reelle* $x > 0$. *Eine mögliche Wertetabelle wäre folgende:*

x	0.001	0.01	0.1	1	2	10	1000
$y = f(x)$	1000	100	10	1	0.5	0.1	0.001

Definitionsbereich $D = \{x \mid x > 0\}$, *Wertebereich* $W = D$



Übung

Bestimmen Sie Definitions-, Wertebereich und den Graphen der

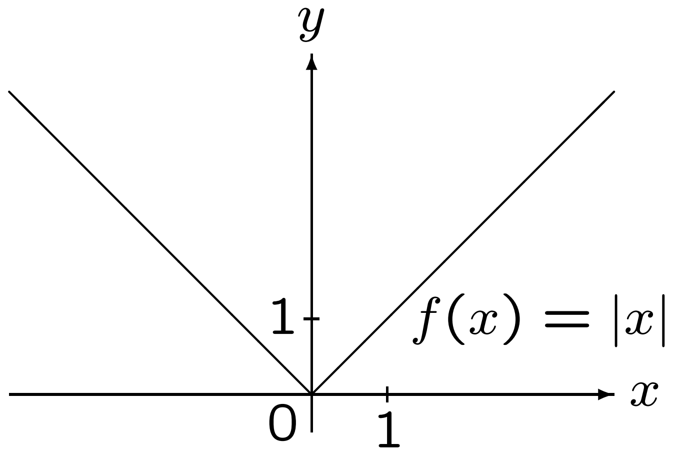
a) Betragsfunktion $f(x) = |x|$*,*

b) Signum-Funktion *(signum, lat.: Vorzeichen), die definiert ist durch*

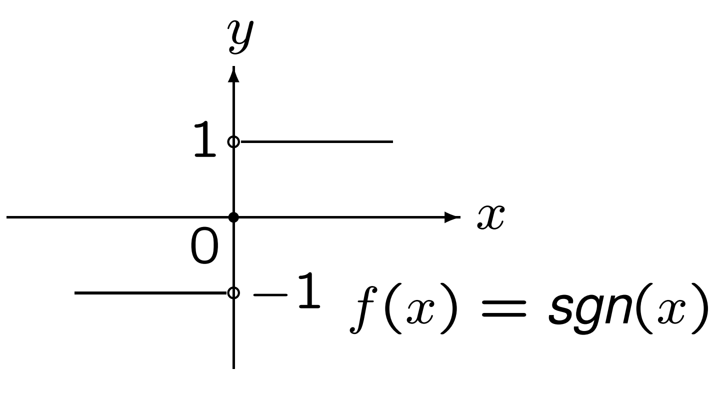
$$\textit{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, \textit{für} } x > 0, \\ 0 & \text{, \textit{für} } x = 0, \\ -1 & \text{, \textit{für} } x < 0. \end{cases}$$

Lösung

a) $f(x) = |x|$ *hat den Definitionsbereich* $D = \mathbb{R}$ *und den Wertebereich* $W = [0, \infty)$.



b) *Für die Signum-Funktion gilt* $D = \mathbb{R}$ *und* $W = \{-1, 0, 1\}$.



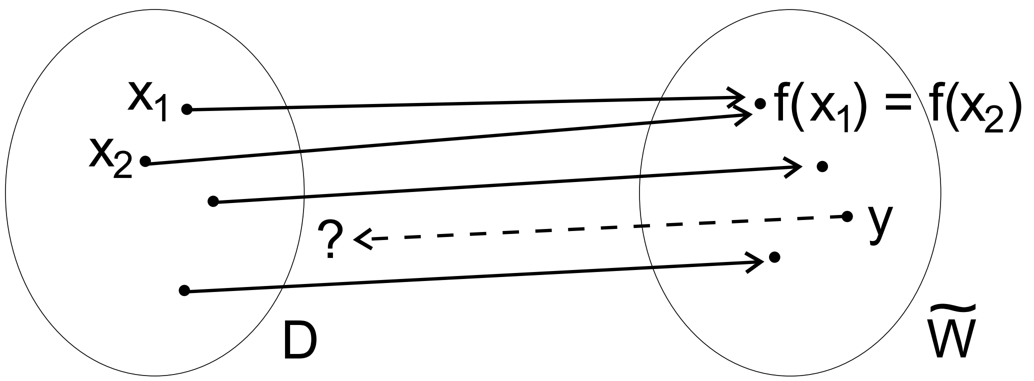
Injektive und surjektive Funktion

- Eine Funktion $f : D \to \tilde{W}$ heißt *injektiv*, wenn keine zwei verschiedenen Argumente x_1 und x_2 gleiche Funktionswerte haben. Aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt also stets $x_1 = x_2$. Dies ist genau dann der Fall, wenn jede Parallele zur x-Achse den Graph G_f in *höchstens* einem Punkt schneidet.

- Eine Funktion $f : D \to \tilde{W}$ heißt *surjektiv*, wenn jedes Element $y \in \tilde{W}$ auch wenigstens einmal als Bild von f auftritt. Man schreibt dann auch $\tilde{W} = W = f(D)$.

Bijektive Funktion

- Eine Funktion nennt man *bijektiv*, wenn sie sowohl *injektiv als auch surjektiv* ist. Für eine bijektive Funktion ist also die Gleichung $f(x) = y$ mit $y \in \tilde{W}$ immer eindeutig lösbar.



Die Umkehrfunktion

Definition

Eine Funktion $f : D \to W$ heißt umkehrbar, wenn zu jedem Funktionswert $y \in W$ genau ein Argumentwert $x \in D$ gehört. Die Funktion

$$f^{-1} : W \to D,$$

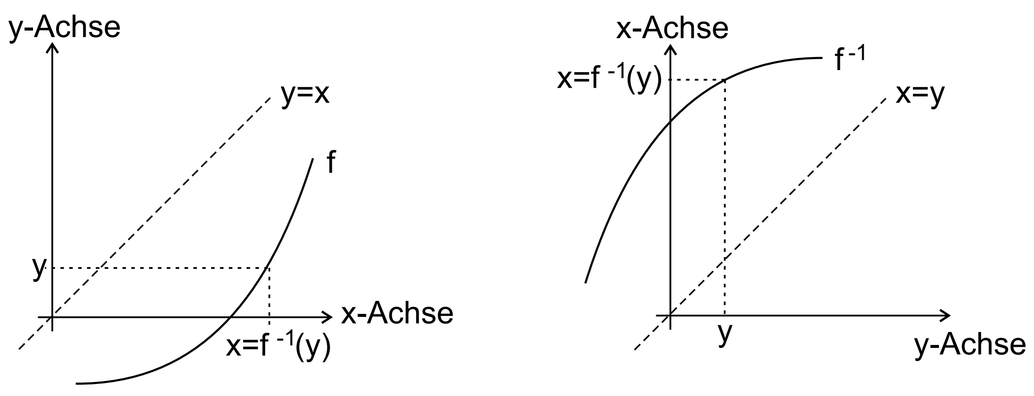
welche den Elementen von W eindeutig die Elemente von D zuordnet, heißt Umkehrfunktion der Funktion f oder die zu f inverse Funktion.

Bestimmung der Umkehrfunktion

Zur praktischen Bestimmung einer Umkehrfunktion empfiehlt sich daher folgendes Vorgehen:

- Löse die Gleichung $y = f(x)$ nach x auf. Dies ergibt $x = f^{-1}(y)$.

- Vertausche x und y. Dies liefert $y = f^{-1}(x)$.



Beispiel

Die Umkehrfunktion von $y = f(x) = 1/x$ *erhält man durch Auflösen der Gleichung* $y = 1/x$ *nach* x*:* $x = 1/y$*.*

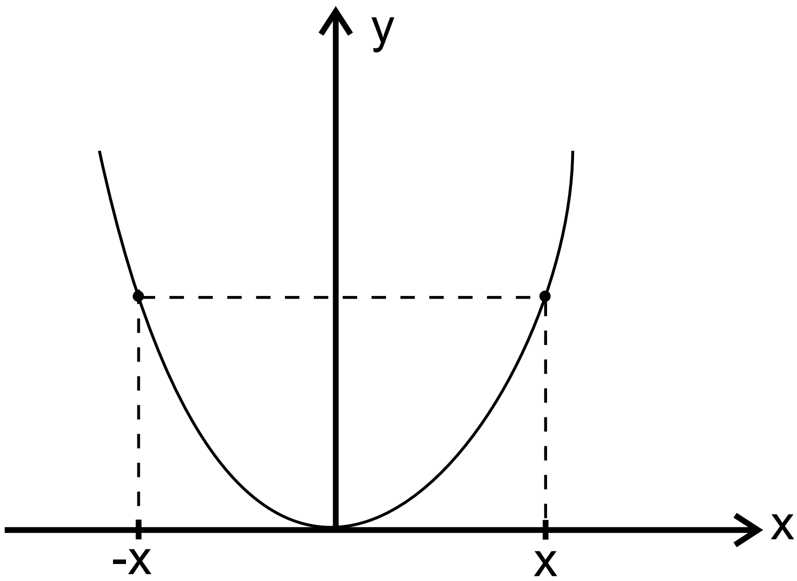
Vertauscht man in der letzten Gleichung x *mit* y*, so erhält man* $y = 1/x$*. Die Umkehrfunktion lautet also* $f^{-1}(x) = 1/x$*.*

Übung

Wo ist die Funktion $f(x) = x^2$ *umkehrbar?*
Bestimmen Sie dort ihre Umkehrfunktion.

Lösung

Der Graph von $f(x) = x^2$ ist die aus der Schule bekannte quadratische Parabel.



Auflösen von Gleichung $y = x^2$ liefert $x = -\sqrt{y}$ bzw. $x = \sqrt{y}$. Nach Vertauschen von x und y ergeben sich die Umkehrfunktionen

$f^{-1} : [0, \infty) \to (-\infty, 0]$ *mit* $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

bzw.

$f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *mit* $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Monotonie

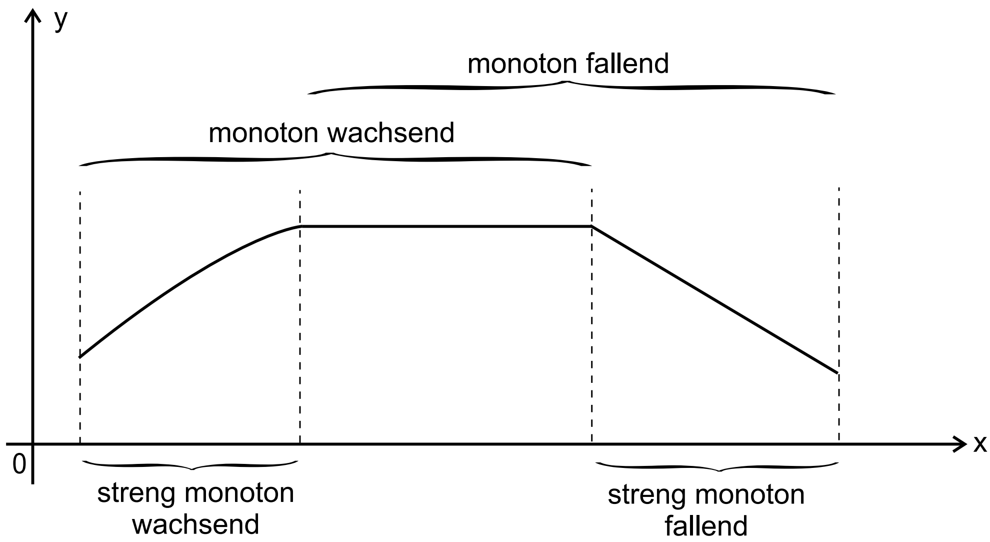
Definition

Eine Funktion $f(x) : D \to W$ heißt in einem Intervall $I \subseteq D$

- **monoton wachsend bzw. steigend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \leq f(x_2)$ gilt;**
- **monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \geq f(x_2)$ folgt.**

Gilt in den Ungleichungen strikte Ungleichheit, so spricht man von strenger Monotonie.

Monotonie-Intervalle einer Funktion



Allgemein gültige Regel: Eine im ganzen Definitionsbereich D *streng* monoton wachsende oder fallende Funktion ist dort umkehrbar.

Periodizität

Definition

Ist f eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion und gilt für eine Konstante $p > 0$

$$f(x + p) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, so heißt f periodisch mit der Periode p. Auch $2p, 3p, \ldots$ sind dann Perioden.

Beispiel
Die Funktionen $\sin x$ *und* $\cos x$ *haben die (kleinste) Periode* $p = 2\pi$ *(z.B.* $\sin(x + 2\pi) = \sin x$*), während* $\tan x$ *und* $\cot x$ *die (kleinste) Periode* $p = \pi$ *(z.B.* $\tan(x + \pi) = \tan x$*) aufweisen.*

Gerade und ungerade Funktion

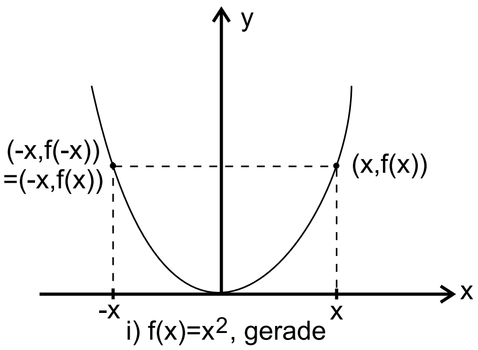
Definition

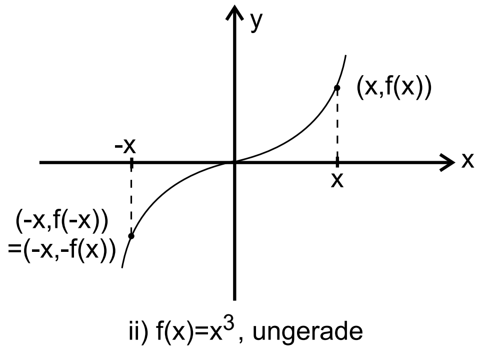
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

- **gerade, falls $f(-x) = f(x)$,**
- **ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$**

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch zur y-Achse.
Der Graph einer ungeraden Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

Gerade und ungerade Funktion





Beispiel

Gerade Funktionen: $f(x) = |x|$, $f(x) = x^2$, *und* $f(x) = \cos(x)$.

Ungerade Funktionen: $f(x) =$ *sgn*(x), $f(x) = x^3$, *und* $f(x) = \sin(x)$.

Nullstelle

Definition

Eine Stelle x_0 im Definitionsbereich einer Funktion $f(x)$ heißt Nullstelle, wenn $f(x_0) = 0$ gilt.

Beispiel
Der Graph der Parabel $f(x) = x^2$ hat in $x_0 = 0$ einen Berührpunkt *mit der x-Achse, der Graph der kubischen Parabel $f(x) = x^3$ schneidet in $x_0 = 0$ die x-Achse.*

In beiden Fällen liegt in $x_0 = 0$ eine Nullstelle vor.

Komposition, Verkettung, Hintereinanderschaltung

Definition

Mit Hilfe der beiden Funktionen $f : D_f \to W_f$ und $g : D_g \to W_g$ kann eine neue Funktion $h : D_f \to W_g$ definiert werden, wenn der Wertebereich von f im Definitionsbereich von g enthalten ist ($W_f \subseteq D_g$). Die so definierte Funktion heißt Hintereinanderschaltung, Verkettung oder Komposition von f und g. Man schreibt $h = g \circ f$ bzw. $h(x) = g(f(x))$.

Man kann auch mehr als zwei Funktionen verketten: $h \circ g \circ f$ bedeutet z.B. $h[g(f(x))]$.

Beispiel

Die Verkettung der Funktionen $f(x) = |x|$ und $g(x) =$ sgn(x) liefert

$$h(x) = g(f(x)) = \text{sgn}|x| = \begin{cases} 1 & \text{, für } x \neq 0, \\ 0 & \text{, für } x = 0. \end{cases}$$

Z.B.:
$x = -5 \mapsto f(-5) = |-5| = 5 \mapsto g(5) =$ sgn$(5) = 1$.

Geometrische Operationen am Funktionsgraphen

Ersetzt man $y = f(x)$ durch	so wird der zugehörige Graph
1. $y = f(x - x_0)$	um x_0 in x-Richtung verschoben, falls $x_0 > 0$: nach rechts falls $x_0 < 0$: nach links
2. $y = f(x) + y_0$	um y_0 in y-Richtung verschoben, falls $y_0 > 0$: nach oben falls $y_0 < 0$: nach unten
3. $y = -f(x)$ 4. $y = f(-x)$ 5. $x = f(y)$	an der x-Achse gespiegelt an der y-Achse gespiegelt an Winkelhalb. $y = x$ gespiegelt
6. $y = af(x),\ a > 0$ 7. $y = f(bx),\ b > 0$	in y-Richtung mit a gestreckt in x-Richtung mit $\frac{1}{b}$ gestreckt

Grenzwert einer Funktion I

Definition

Die Funktion $f : D \longrightarrow W$ hat in einem Punkt x_0 (der nicht in D liegen muss!) genau dann den Grenzwert a, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ mit $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = a.$$

In diesem Falle sagt man, dass $f(x)$ für $x \longrightarrow x_0$ gegen a konvergiert und schreibt:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = a.$$

Beispiel

a) *Die Funktion* $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ *hat den Definitionsbereich* $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. *In* D *ergibt sich für* $f(x)$ *also die Darstellung*

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1.$$

Damit gilt aber für beliebige Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ *mit* $x_n \in D$ *und* $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, $x_n \neq 1$ *stets* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n+1) = 1+1 = 2$. *Also konvergiert* $f(x)$ *gegen* 2 *für* $x \to 1$, *d.h. es ist* $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

b) *Gegeben sei die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ *mit*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

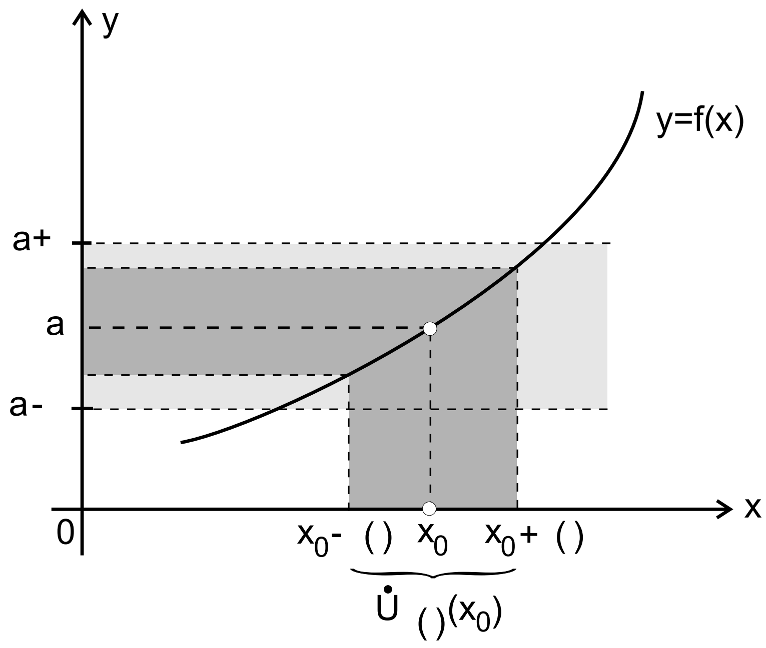
Für alle $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ *ist also stets* $f(x_n) = 1$, *d.h.*
$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$ *bzw.* $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Grenzwert einer Funktion II

Definition

Sei $f(x)$ eine in einer punktierten Umgebung von x_0 definierte Funktion. Dann hat $f(x)$ in x_0 den Grenzwert a genau dann, falls sich zu jeder (beliebig kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ immer eine weitere Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$ derart angeben lässt, dass

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \textbf{für alle} \quad x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0).$$



Beispiel
Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{3}{2}x\sin(\frac{\pi}{x})$*, die in* $x_0 = 0$ *nicht definiert ist. Wir zeigen jetzt, dass* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ *gilt: Sei also ein (beliebig kleines)* $\varepsilon > 0$ *vorgegeben, dann müssen wir ein* $\delta(\varepsilon)$ *angeben, so dass die Ungleichung* $|f(x) - 0| < \varepsilon$ *erfüllt ist. Es ist*

$$|f(x) - 0| = \left|\frac{3}{2}x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \leq \frac{3}{2}|x| \cdot 1 = \frac{3}{2}|x|$$

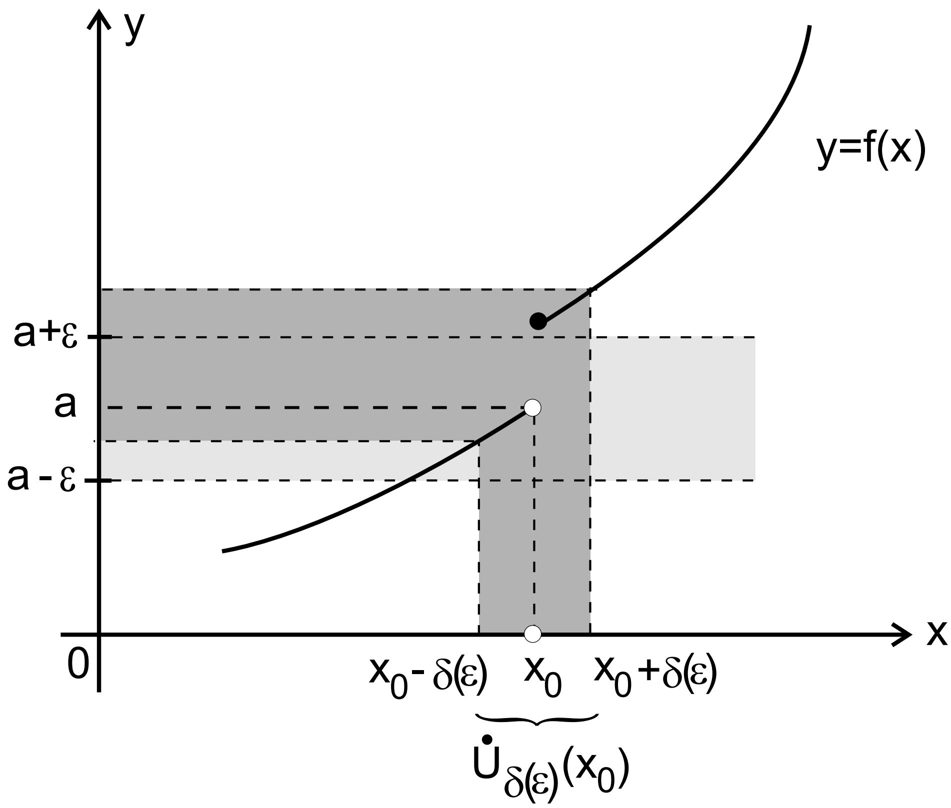
Wählt man also $\delta(\varepsilon) := \frac{2}{3}\varepsilon$*, so gilt für alle* $x \in \dot{U}_{\frac{2}{3}\varepsilon}(0)$*:*

$$|f(x) - 0| \leq \frac{3}{2}|x| < \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Damit hat man die geforderte Ungleichung.

Grenzwertverhalten in Sprungstelle

Hat nun eine Funktion eine Sprungstelle, so sieht man, dass zu der dort vorgegebenen ε-Umgebung keine noch so kleine $\delta(\varepsilon)$-Umgebung existiert, deren $f(x)$-Werte ganz im Parallelstreifen um a liegen. Die Funktion besitzt also in x_0 keinen Grenzwert.



Linksseitiger Grenzwert

Definition

Sei $f(x)$ definiert auf dem Intervall $(x_0 - b, x_0)$ mit $b > 0$. Man sagt dann, dass $f(x)$ in x_0 den linksseitigen Grenzwert a_L hat, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ mit $x_n < x_0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a_L.$$

Mögliche Schreibweisen sind:

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = a_L$$

oder

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = a_L.$$

Rechtsseitiger Grenzwert

Definition

Sei $f(x)$ definiert auf dem Intervall (x_0, x_0+b) mit $b > 0$. Man sagt dann, dass $f(x)$ in x_0 den rechtsseitigen Grenzwert a_R hat, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ mit $x_n > x_0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a_R.$$

Mögliche Schreibweisen sind:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = a_R$$

oder

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = a_R.$$

Beispiel

Für die Funktion $f(x) =$ sgn(x) gilt:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1,$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1.$$

Es ist $a_L \neq a_R$ und damit $f(x)$ in $x = 0$ nicht konvergent.

Grenzwerte für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$

Bei $x \to \infty$ gibt es natürlich höchstens einen linksseitigen Grenzwert a_L, bei $x \to -\infty$ höchstens einen rechtsseitigen Grenzwert a_R. In beiden Fällen spricht man von einem Grenzwert schlechthin und schreibt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a_L \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a_R.$$

Beispiel

Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

da mit $x_n \to \infty$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Übung

a) *Untersuchen Sie das Grenzverhalten der Funktion $f(x) = 1/x$ im Punkt $x_0 = 0$. Ist die Funktion konvergent?*

b) *Konvergiert die Funktion*

$$f(x) = \frac{x(x-5)}{|x-5|}$$

in $x_0 = 5$?

Lösung

a) *Offensichtlich ist*

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty$$

und

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty.$$

Rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren nicht, $f(x)$ besitzt deshalb in $x_0 = 0$ keinen Grenzwert, ist dort also nicht konvergent.

b) *Da $|x - 5| = x - 5$ für x-Werte rechts von $x_0 = 5$, ergibt sich*

$$\lim_{x \to 5+} f(x) = \lim_{x \to 5+} x = 5.$$

Andererseits ist $|x - 5| = -(x - 5)$ für x-Werte links von $x_0 = 5$, woraus folgt

$$\lim_{x \to 5-} f(x) = \lim_{x \to 5-} -x = -5.$$

Weil rechts- und linksseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen, besitzt $f(x)$ in $x_0 = 5$ keinen Grenzwert.

Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte

Wenn $\lim f(x)$ **und** $\lim g(x)$ **(für** $x \to x_0$ **oder auch für** $x \to \pm\infty$**) existieren, dann gilt:**

a) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$,

b) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$,
Spezialfall ($c =$ **const):**
$\lim[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim f(x)$,

c) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, **falls** $g(x) \neq 0$,

d) „Sandwichtheorem“:
Aus $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$ **und** $\lim g(x) = \lim f(x) = a$, **folgt** $\lim h(x) = a$.
Spezialfall ($g(x) = -f(x)$, $a = 0$**): Gilt** $|h(x)| \leq f(x)$ **und** $\lim f(x) = 0$, **so folgt** $\lim h(x) = 0$.

Beispiel
Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{x^2+\sin x}{1+x^2}$ *für* $x \to \infty$. *Ausklammern von* x^2 *in Zähler und Nenner mit anschließendem Kürzen liefert*

$$f(x) = \frac{1 + \frac{\sin x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + 1}.$$

Nun ist wegen Regel b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Daraus folgt aufgrund von $\mid \frac{\sin x}{x^2} \mid \leq \frac{1}{x^2}$ *nach dem „Sandwichtheorem“*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0.$$

Unter Beachtung von Regel a) und c) ergibt sich somit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1+0}{0+1} = 1.$$

Übung

Bestimmen Sie folgende Funktionsgrenzwerte G:

a) $G = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

b) $G = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+3x})$

[Hinweis: Erweitern Sie mit

$$\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+3x}$$

und kürzen Sie dann den entstehenden Bruch.]

Lösung

a) *Der Grenzwert lässt sich leicht durch Umformungen berechnen:*

$$\begin{aligned} G &= \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} \\ G &= \lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x\to 1} \left(1+\sqrt{x}\right) = 1+1=2. \end{aligned}$$

Lösung

b) Beachtung des Hinweises, abschließendes Ausklammern und Kürzen von x in Zähler und Nenner ergibt:

$$\begin{aligned}
G &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+3x})(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3x})}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2-(x^2+3x)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x}\cdot\frac{-3+\overbrace{2/x}^{\to 0}}{\sqrt{1+\underbrace{2/x^2}_{\to 0}}+\sqrt{1+\underbrace{3/x}_{\to 0}}} = \frac{-3+0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Stetige Funktion

Definition

Eine Funktion $f : D \to W$ heißt in $x_0 \in D$

- **stetig, falls**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

d.h. der Grenzwert muss existieren und gleich dem Funktionswert in x_0 sein,

- **linksseitig stetig, falls**

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0),$$

- **rechtsseitig stetig, falls**

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0).$$

Die Funktion heißt stetig im Intervall I, wenn $f(x)$ für jedes $x \in I$ stetig ist.

Wichtige Merkregel:

$$\boldsymbol{f} \textbf{ stetig in } \boldsymbol{x_0} \Longleftrightarrow$$

$$\lim_{\boldsymbol{x \to x_0}} \boldsymbol{f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \to x_0} x).}$$

Da Wurzel- und Exponentialfunktion stetig sind, bedeutet dies beispielsweise, dass Umformungen der Form

$$\lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim f(x)}$$

bzw.

$$\lim \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{\lim f(x)}$$

möglich sind.

Beispiel

a) *Für die Funktion $f(x) =$ sgn(x) gilt:*

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1, \lim_{x \to 0+} f(x) = 1.$$

Deshalb ist $f(x)$ in $x = 0$ (Sprungstelle!) unstetig*. In $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ ist sie aber stetig. Nur beim Durchlaufen des Nullpunktes muss man beim Zeichnen ihres Graphen absetzen.*

b) *Die Betragsfunktion ist eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion.*

c) *Viele Funktionen, die noch vorgestellt werden, sind in ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig:*

Polynome, Exponential- und Logarithmusfunktionen, Trigonometrische Funktionen etc.

Übung

Ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ *in* $x_0 = 1$ *stetig?*

Lösung

Da sie in $x_0 = 1$ *nicht definiert ist, kann sie dort auch nicht stetig sein.*

In einem vorangehenden Beispiel wurde aber bereits

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

gezeigt. In diesem Fall sagt man, dass die Funktion in $x_0 = 1$ *durch die Vereinbarung* $f(1) = 2$ stetig ergänzbar *ist. Es gilt dann nämlich*

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1).$$

Der Graph der Funktion hat für $x_0 = 1$ *lediglich ein „Loch", aber keine Sprungstelle.*

Kombination stetiger Funktionen

Seien $f(x)$ und $g(x)$ stetige Funktionen in x_0. Dann sind auch folgende Funktionen in x_0 stetig:

$$f(x) \pm g(x), \;\; f(x) \cdot g(x),$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \;\; \text{falls } g(x_0) \neq 0.$$

Komposition stetiger Funktionen

Ist $f(x)$ stetig in x_0 und $g(u)$ stetig in $u_0 = f(x_0)$, so ist die zusammengesetzte Funktion $y = g(f(x))$ stetig in x_0.

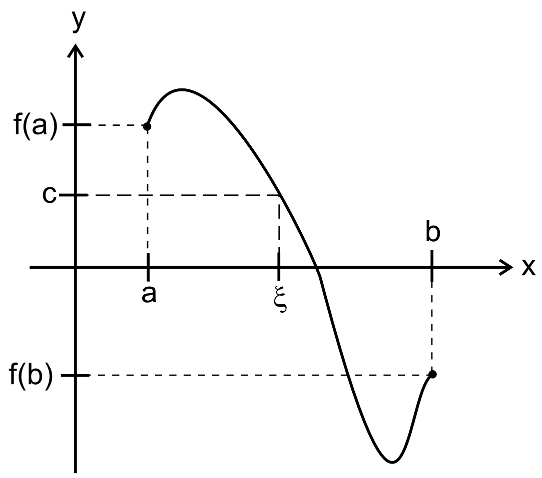
Beispiel

a) *Die Funktion* $f(x) = \frac{x}{|x|}$ *ist für alle* $x \neq 0$ *stetig, da* $y = x$ *und die Betragsfunktion stetig sind.*

b) *Die Funktion* $y = \sqrt{x^2 + 5}$ *ist stetig auf* $\mathbb{R}$*, da* $f(x) = x^2 + 5$ *in* $\mathbb{R}$ *und* $g(u) = \sqrt{u}$ *für* $u \geq 0$ *stetig sind.*

Zwischenwertsatz

Seien $y = f(x)$ stetig auf dem abgeschlossen Intervall $I = [a, b]$ und c eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann existiert mindestens ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$.



Spezialfall: *Nullstellensatz von Bolzano*:
Haben $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliches Vorzeichen, dann hat $f(x)$ in $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle. Dies ist Grundlage für viele numerische Verfahren zur Bestimmung von Funktions-Nullstellen.

Polynome

Definition

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_n (\neq 0), a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ heißt die Funktion $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto p(x)$ mit

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Polynom n-ten Grades mit den Koeffizienten a_k, $k = 0, 1, ..., n$.

Polynome

Beispiel

a) *Die Funktion*

$$p(x) = x^2 + x - 12$$

ist ein Polynom 2. Grades oder ein so genanntes quadratisches Polynom. Der Funktionsgraph hat eine spezielle Form: Es ist eine (noch aus der Schule bekannte) Parabel.

b) *Es ist*

$$p(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10$$

ein Polynom 4. Grades. Wenn man z.B. für x *die Zahl* 2 *einsetzt, so erhält man als Funktionswert*

$$p(2) = 2^4 - 2^3 + 2^2 + 9 \cdot 2 - 10 = 20.$$

Nullstellen, Linearfaktoren

Definition

Die Zahl x_1 heißt Nullstelle des Polynoms $p(x)$, wenn gilt:

$$p(x_1) = 0.$$

Ist x_1 eine Nullstelle des Polynoms $p(x)$ vom Grade $n > 0$, so kann man den Linearfaktor $(x - x_1)$ ohne Rest abdividieren:

$$p(x) = (x - x_1) \cdot p_{n-1}(x)$$

Dabei ist $p_{n-1}(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades.

Beispiel

a) *Das Polynom* $p(x) = x^2 + x - 12$ *hat die beiden Nullstellen* $x_1 = 3$ *und* $x_2 = -4$. *Man berechnet sie über die Formel für quadratische Gleichungen* $x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$. *Zur Nullstelle* $x_1 = 3$ *gehört der Linearfaktor* $(x - 3)$, *zur Nullstelle* $x_2 = -4$ *gehört der Linearfaktor* $(x - (-4)) = (x + 4)$. *Man kann daher das Polynom wie folgt schreiben:* $x^2 + x - 12 = (x - 3) \cdot (x + 4)$.

b) *Das Polynom* $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10$ *hat die Nullstelle* $x_1 = 1$ *wegen* $1^4 - 1^3 + 1^2 + 9 \cdot 1 - 10 = 0$. *Der zugehörige Linearfaktor lautet* $(x - 1)$. *Man kann daher das Polynom* $p(x)$ *schreiben als* $p(x) = (x - 1) \cdot p_3(x)$, *wobei* $p_3(x)$ *ein Polynom 3. Grades ist*

Polynomdivision

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 & -x^3 & +x^2 & +9x & -10) & : \ (x-1) \ = x^3 + x + 10 \\
x^4 & -x^3 & & & & \\
\hline
 & & x^2 & +9x & -10 & \\
 & & x^2 & -x & & \\
\cline{3-5}
 & & & 10x & -10 & \\
 & & & 10x & -10 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Diese Rechnung zeigt, dass sich das Polynom 4. Grades $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10$ ohne Rest durch den Linearfaktor (=Polynom 1. Grades) $(x-1)$ dividieren lässt. Das Ergebnis dieser Division ist ein Polynom 3. Grades: $x^3 + x + 10$. Insgesamt:

$$(x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10) = (x-1) \cdot (x^3 + x + 10).$$

Beispiel

Eine Polynomdivision, die nicht „aufgeht“, ist etwa die folgende:

$$
\begin{array}{rrrrrcl}
(x^4 & -x^3 & +x^2 & +9x & -10) & : & (x^2-5x+1) \ = x^2+4x \\
x^4 & -5x^3 & +x^2 & & & & \qquad\qquad\qquad\quad +20 \\
\cline{1-4}
 & 4x^3 & & +9x & & & \\
 & 4x^3 & -20x^2 & +4x & & & \\
\cline{2-5}
 & & 20x^2 & +5x & -10 & & \\
 & & 20x^2 & -100x & +20 & & \\
\cline{3-5}
 & & & 105x & -30 & &
\end{array}
$$

Wir erhalten:

$$(x^4-x^3+x^2+9x-10) = (x^2-5x+1)\cdot(x^2+4x+20)+(105x-30).$$

Der Rest hat einen kleineren Grad als das Divisor-Polynom.

Beispiel

Das Polynom

$$p(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10$$

hat — wie bereits gezeigt — die Nullstelle $x_1 = 1$.
Für $x_1 = 1$ *liefert das Horner-Schema*

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -1 & 1 & 9 & -10 \\ + & & 1 & 0 & 1 & 10 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 10 & 0 \end{array}$$

und damit das Ergebnis

$$\begin{aligned} p(1) &= 0 \textit{ und} \\ p(x) &= \underbrace{(1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 10)}_{= p_3(x)} \cdot (x - 1). \end{aligned}$$

Horner-Schema

<u>1. Zeile:</u> Koeffizienten des Polynoms, wobei „fehlende Potenzen“ mit „0“ eingetragen werden.

<u>2. Zeile:</u> Jeweils der Wert $a_l' \cdot x_1$, d.h. voriger Wert aus der 3. Zeile mal Stelle x_1.

<u>3. Zeile:</u> Addition der 1. und 2. Zeile.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
+ & & a_4' \cdot x_1 & a_3' \cdot x_1 & a_2' \cdot x_1 & a_1' \cdot x_1 \\
\hline
 & \underbrace{a_4}_{=a_4'} & \underbrace{a_3 + a_4' x_1}_{=a_3'} & \underbrace{a_2 + a_3' x_1}_{=a_2'} & \underbrace{a_1 + a_2' x_1}_{=a_1'} & \underbrace{a_0 + a_1' x_1}_{=a_0'}
\end{array}
$$

3. Zeile liefert Ergebnis: Ganz rechts gibt a_0' den Funktionswert an der Stelle x_1 an (falls x_1 Nullstelle, so $a_0' = 0$).

Links neben a_0': Koeffizienten des Polynoms, welches das Ergebnis der Division des Ausgangspolynoms durch den Linearfaktor $(x - x_1)$ ist.

$$p(x_0) = (...((a_n x_0 + a_{n-1})x_0 + a_{n-2})x_0 + ... + a_1)x_0 + a_0$$

Übung

Zeigen Sie, dass $x_2 = -2$ *Nullstelle des (verbleibenden) Polynoms*

$$p_3(x) = x^3 + x + 10$$

ist. Dividieren Sie den entsprechenden Linearfaktor

$$(x - x_2)$$

von $p_3(x)$ *ab. Benutzen Sie alternativ dazu das Hornerschema.*

Lösung

Durch Polynomdivision ergibt sich:

$$
\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & & +x & +10) & : \ (x+2) \ = x^2-2x+5 \\
x^3 & +2x^2 & & & \\
\hline
 & -2x^2 & & & \\
 & -2x^2 & -4x & & \\
\hline
 & & 5x & & \\
 & & 5x & +10 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Alternativ erhält man mit dem Horner-Schema:

$$
\begin{array}{c|rrrr}
 & 1 & 0 & 1 & 10 \\
+ & & -2 & 4 & -10 \\
\hline
 & 1 & -2 & 5 & 0 \\
 & & \scriptstyle(-2)\cdot 1 & \scriptstyle(-2)\cdot(-2) & \scriptstyle(-2)\cdot 5
\end{array}
$$

Insgesamt:

$$p_3(x) = x^3 + x + 10 = (x+2)\cdot(x^2-2x+5).$$

Operationen mit Polynomen, rationale Funktionen

Polynome kann man addieren, subtrahieren und multiplizieren. Man erhält dann wieder ein Polynom.
Die Division von Polynomen funktioniert — wie gesehen — nicht immer ohne Rest. Man nennt den Quotienten zweier Polynome $f(x)$ und $g(x)$

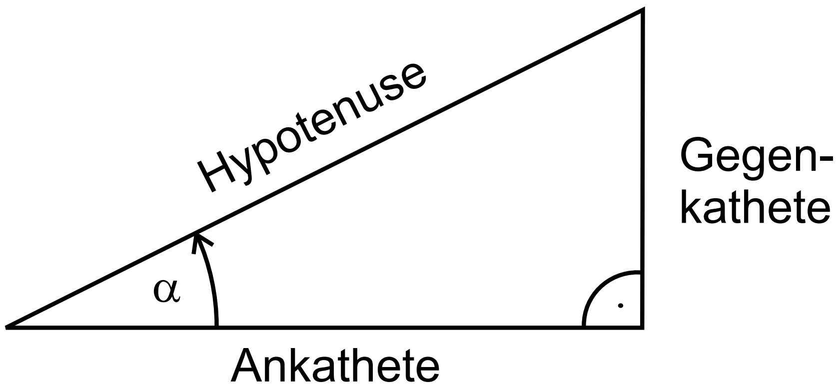
$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

eine rationale Funktion. Ihr Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen von $g(x)$.

Trigonometrische Funktionen und Seitenverhältnisse am rechtwinkligen Dreieck

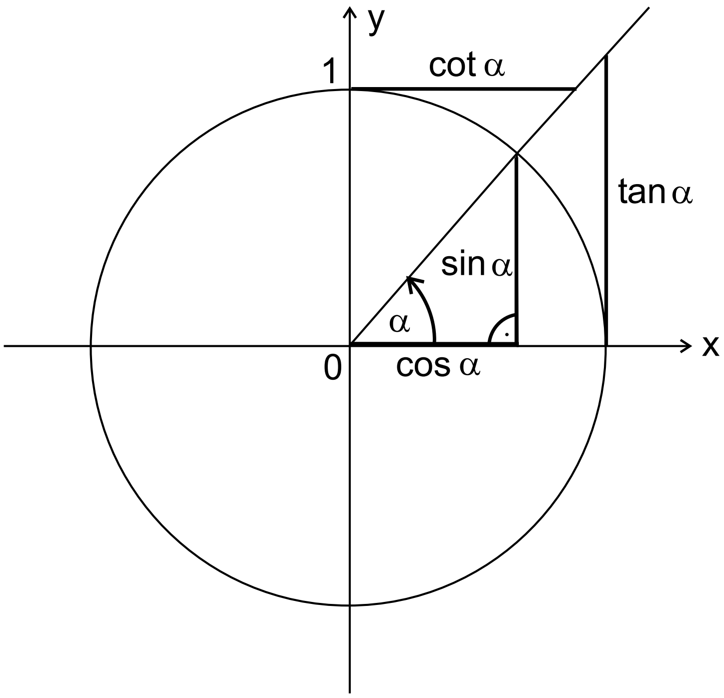
Trigonometrische Funktionen, wie Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens beschreiben Seitenverhältnisse am rechtwinkligen Dreieck, etwa

$$\text{Sinus}(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$



Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

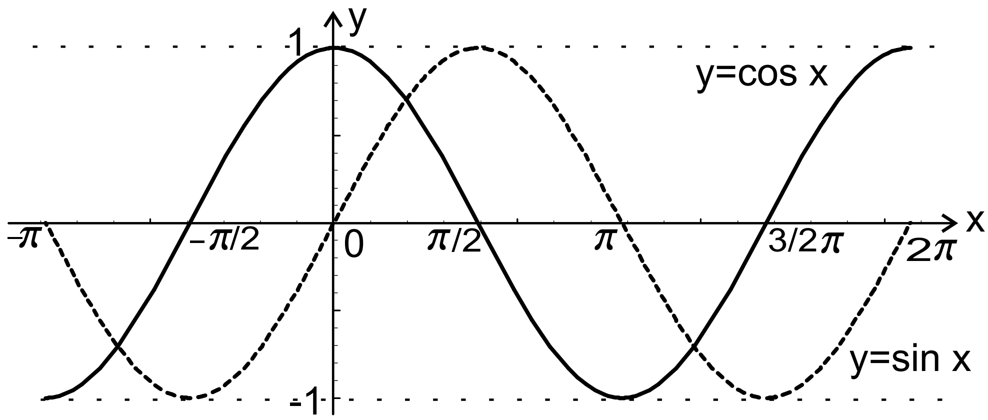
Die Länge der markierten Strecken ist jeweils der Sinus, Cosinus, Tangens bzw. Cotangens des gezeichneten Winkels α.

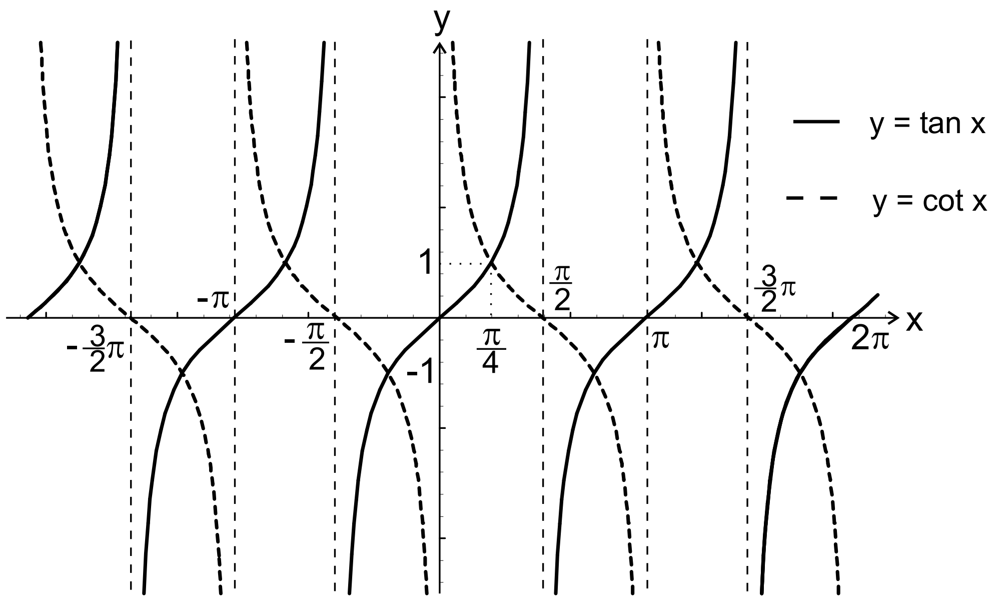


Umrechnung für Gradmaß und Bogenmaß :

$$\frac{x \text{ (in Bogenmaß)}}{\alpha \text{ (in Grad)}} = \frac{2\pi}{360^\circ} \quad \text{und} \quad x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$$

Funktionsgraphen der trigonometrischen Funktionen





Wichtige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

- Alle Winkelfunktionen sind *periodisch*, d.h. der Kurvenverlauf wiederholt sich: Sinus und Cosinus sind 2π-periodisch, Tangens und Cotangens sind π-periodisch.

- Alle Winkelfunktionen lassen sich ineinander umrechnen. Der Cosinus ist z.B. ein „verschobener" Sinus:
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x),$$
Tangens und Cotangens sind über Sinus und Cosinus definiert:
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

- Für den Zusammenhang zwischen Sinus und Cosinus ist auch der Satz von Pythagoras wichtig:
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Wichtige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

- Bei der praktischen Anwendung von trigonometrischen Funktionen muss man oft die so genannten *Additionstheoreme* (vgl. Formelsammlung) verwenden, etwa:

$$\begin{aligned}\sin(x_1 \pm x_2) &= \sin x_1 \cdot \cos x_2 \\ &\quad \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2 \\ \cos(x_1 \pm x_2) &= \cos x_1 \cdot \cos x_2 \\ &\quad \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2 .\end{aligned}$$

- Die „Techniker“ benötigen häufig eine Tabelle (mit einer „Eselsbrücke“ zum Merken spezieller Sinus- und Cosinuswerte):

Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sinus	0	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
Cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$

Beispiel

Wir lösen die trigonometrische Gleichung

$$\sin 2x - \cos x = 0.$$

Die Anwendung des ersten Additionstheorems ergibt

$$\sin 2x = \sin(x + x) = 2 \sin x \cos x,$$

also insgesamt

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

bzw. nach Ausklammern

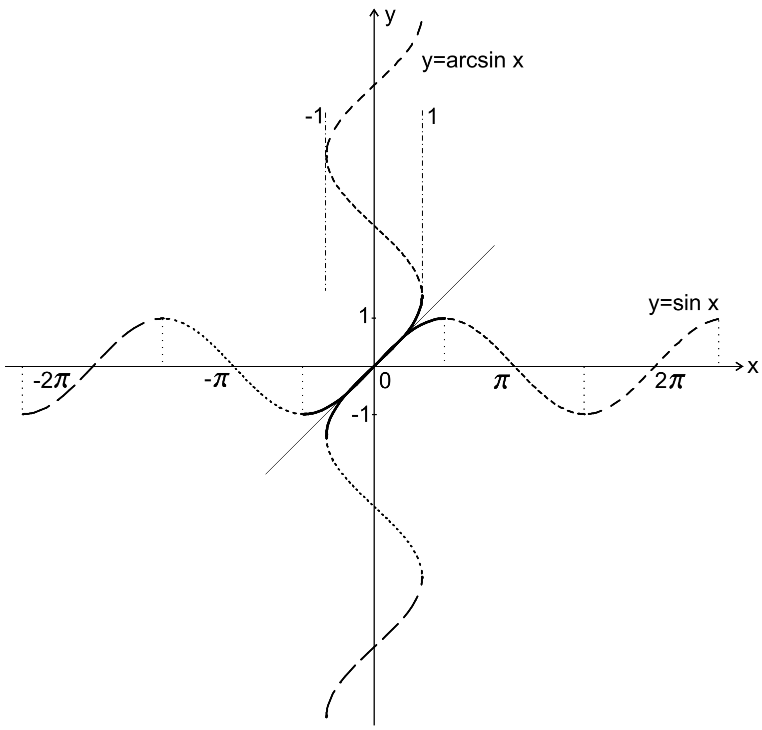
$$(2 \sin x - 1) \cdot \cos x = 0.$$

Einer der beiden Faktoren muss 0 *sein, also*

a) $\sin x = 1/2 \implies x = \pi/6, x = 5\pi/6$
b) $\cos x = 0 \implies x = \pi/2, x = 3\pi/2.$

Die gefundenen vier Lösungen wiederholen sich 2π*-periodisch;*
z.B ist neben $\pi/6$ *auch* $13\pi/6$ *oder* $25\pi/6$ *Lösung.*

Umkehrung der trigonometrischen Funktionen



Definition

Die Umkehrfunktion des Sinus auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ heißt Arcussinus ($\arcsin$). Es gilt:

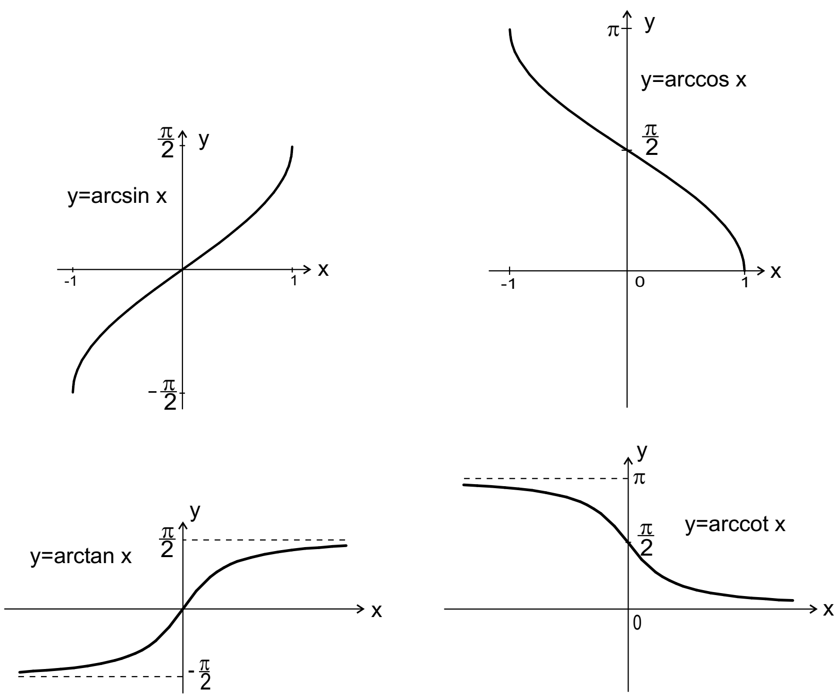
$$\arcsin x : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Umkehrung der trigonometrischen Funktionen

Definition

Entsprechende Umkehrfunktionen (genannt Arcusfunktionen) existieren auch für die anderen trigonometrischen Funktionen Cosinus, Tangens und Cotangens mit

$$
\begin{array}{llll}
\arccos x & : & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi], \\
\arctan x & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), \\
\operatorname{arccot} x & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & (0,\pi).
\end{array}
$$



Wichtige Formeln

Man beachte etwa

$$\lim_{x \to -\infty} \tan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

und

$$\lim_{x \to \infty} \tan(x) = \frac{\pi}{2}$$

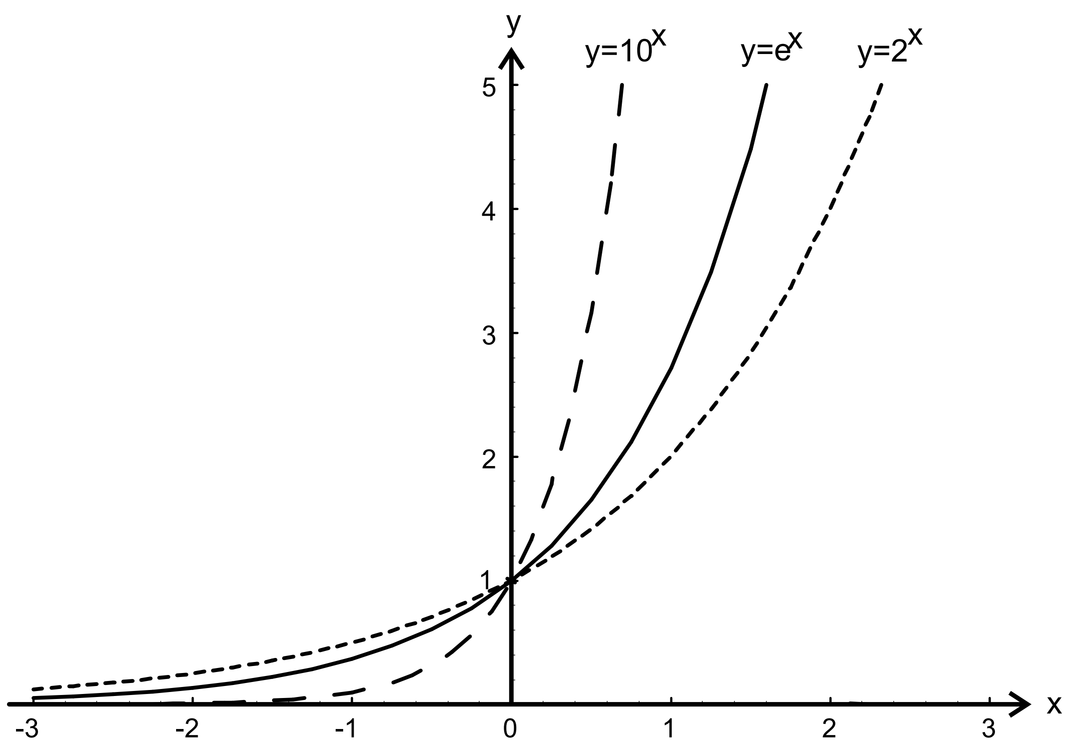
sowie

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

Auch die übrigen Arcusfunktionen lassen sich ineinander umrechnen. Bei Bedarf konsultiere man eine Formelsammlung.

Die Potenzfunktionen

Man kann nun $f(x) = 2^x$ auch ganz allgemein für reelle Exponenten definieren und erhält eine so genannte *Potenzfunktion*. Als Basis könnte man natürlich auch andere Werte als 2 wählen, etwa 10 oder die in der Mathematik so beliebte *Euler'sche Zahl* $\mathrm{e} \approx 2.7182818$.
Die zugehörigen Potenzfunktionen ähneln einander sehr:



Die Exponentialfunktion $f(x) = \mathrm{e}^x$

Sie dient in den Anwendungen meist zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsprozessen; Die Eulersche Zahl e haben wir schon als Grenzwert einer Folge eingeführt:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

analog gilt

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Allerdings wird die Exponentialfunktion meist als *unendliche Reihe* eingeführt:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Funktionalgleichung der e–Funktion

Für die Exponentialfkt. $\mathrm{e}^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ **gilt (für** $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$**):**

$$\mathrm{e}^{x_1 + x_2} = \mathrm{e}^{x_1} \cdot \mathrm{e}^{x_2}.$$

In Übereinstimmung mit den bekannten Rechenregeln für Potenzen gelten dann auch die weiteren Rechengesetze:

Es gilt:

$$\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}, \quad (\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{x \cdot y},$$

$$\mathrm{e}^0 = 1, \quad \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

Grenzverhalten der e–Funktion

Es ist:

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x} = \infty.$$

Bezüglich des Wachstumsverhaltens der Exponentialfunktion lässt sich weiterhin bemerken, dass die Exponentialfunktion sehr rasch ansteigt, und zwar (auf lange Sicht) schneller als jede noch so große Potenz von x, in Formelzeichen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x^{n}} = \infty$$

für beliebiges n. In der Informatik spricht man daher auch von *exponentiellem Wachstum* im Gegensatz zum langsameren *polynomialen Wachstum*.

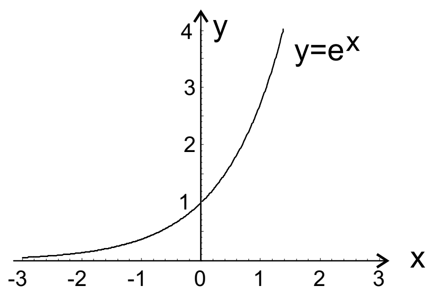
(Natürlicher) Logarithmus

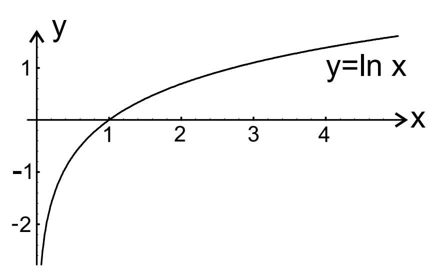
Da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, gehören zu verschiedenen Argumenten x_1 und x_2 auch verschiedene Funktionswerte e^{x_1} und e^{x_2}. Man kann also die Gleichung $e^x = y$ für jedes $y > 0$ nach x auflösen.

Definition

Die Funktion $\ln x : (0, \infty) \to I\!R$, genannt (natürlicher) Logarithmus, ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Der Graph von $\ln x$ ergibt sich entsprechend durch Spiegelung der Exponentialfunktion an der Winkelhalbierenden.





Die Funktionalgleichung für den Logarithmus

Für den (natürlichen) Logarithmus gilt:

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$$

für $x_1, x_2 > 0$.

Dies folgt unmittelbar aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und der Eigenschaft, dass Exponentialfunktion und Logarithmus Umkehrfunktionen sind:

$$\mathrm{e}^{\ln x_1 + \ln x_2} = \mathrm{e}^{\ln x_1} \cdot \mathrm{e}^{\ln x_2} = x_1 \cdot x_2 = \mathrm{e}^{\ln(x_1 \cdot x_2)}.$$

Exponentenvergleich links und rechts liefert das Ergebnis.

Weitere wichtige Rechenregeln für Logarithmen

Es gilt für $x_1, x_2 > 0$:

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln x_1 - \ln x_2,$$

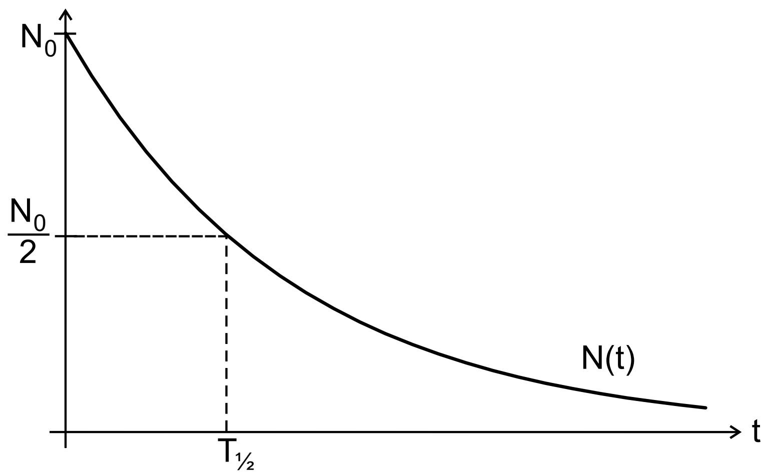
$$\ln\left(x_1^{x_2}\right) = x_2 \cdot \ln x_1.$$

Beispiel

Radioaktiven Zerfall kann man durch die Funktion

$$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

beschreiben. Dabei bezeichnet $N(t)$ die Anzahl der zur Zeit t vorhandenen (d.h. noch nicht zerfallenen) Atome, N_0 ist die Anzahl der anfänglich (d.h. zur Zeit $t = 0$) vorliegenden Atome und $\lambda > 0$ ist eine dem Material eigene Zerfallskonstante, die angibt, wie schnell (oder wie langsam) der Stoff zerfällt. Unter der Halbwertszeit $T_{1/2}$ versteht man nun die Zeit, in der die Zahl anfangs vorhandener (oder zu irgendeiner Zeit vorhandener) Atome auf die Hälfte abgenommen hat.



Die Halbwertszeit berechnet sich wegen $N(T_{1/2}) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda T_{1/2}}$ zu:

$$\begin{aligned} & N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda T_{1/2}} &=& \frac{N_0}{2} \\ \iff & \mathrm{e}^{-\lambda T_{1/2}} &=& \frac{1}{2} \\ \iff & -\lambda T_{1/2} &=& \ln(1/2) = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \\ \iff & T_{1/2} &=& \frac{\ln 2}{\lambda}. \end{aligned}$$

Übung

Radium Ra_{88}^{226} *hat eine Halbwertszeit von* 1580 *Jahren. Nach welcher Zeit liegen von diesem radioaktiven Stoff nur noch 1 % der anfänglich vorhandenen Atome vor?*

Lösung

Wegen $N(T_{0.01}) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda T_{0.01}}$ *gilt:*

$$\begin{aligned}
& & N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda T_{0.01}} &= \frac{N_0}{100} \\
&\iff & \mathrm{e}^{-\lambda T_{0.01}} &= \frac{1}{100} \\
&\iff & -\lambda T_{0.01} &= -\ln 100 \\
&\iff & T_{0.01} &= \frac{\ln 100}{\lambda} = \frac{\ln 100}{\left(\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\right)} = \frac{\ln 100}{\ln 2} \cdot T_{1/2} \\
&\iff & T_{0.01} &\approx 6.64 \cdot 1580 \textit{ Jahre} \approx 10500 \textit{ Jahre.}
\end{aligned}$$

Allgemeine Exponentialfunktion

Definition

Als allgemeine Exponentialfunktion wird die Funktion

$$a^x := \mathrm{e}^{x \cdot \ln a} : \mathbb{R} \to (0, \infty)$$

mit $a > 0$ bezeichnet. Auch hier gilt für x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionalgleichung

$$a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}.$$

Auch die anderen Eigenschaften übertragen sich von der Exponentialfunktion auf die allgemeine Exponentialfunktion: So ist sie stetig, es gilt $a^0 = 1$. Die allgemeine Exponentialfunktion ist auch monoton — und zwar streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

a–Logarithmus als Umkehrfunktion von $y = a^x$

Definition

Die Funktion

$$\log_a x : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

für $a > 0$, $a \neq 1$, genannt a–Logarithmus, ist die Umkehrfunktion der allgemeinen Exponentialfunktion. Auch für den Logarithmus gilt für x_1, $x_2 > 0$ die Funktionalgleichung

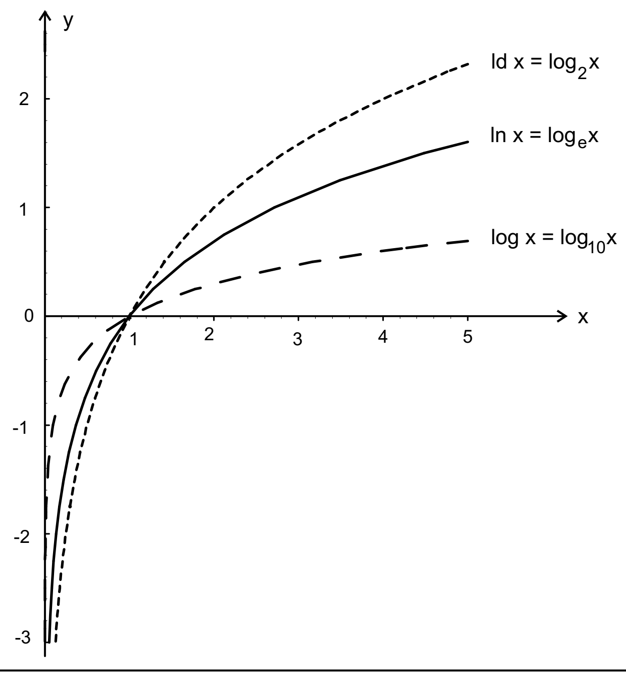
$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

a–Logarithmus und natürlicher Logarithmus

Für $a > 0$ und $x > 0$ gilt:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Neben dem (natürlichen) Logarithmus $\ln x = \log_e x$ (also dem Logarithmus zur Basis e) wird auch der duale oder binäre Logarithmus $\operatorname{ld} x = \log_2 x$ (zur Basis 2) und der dekadische bzw. Brigg'sche Logarithmus $\log x = \log_{10} x$ (zur Basis 10) häufig verwendet.



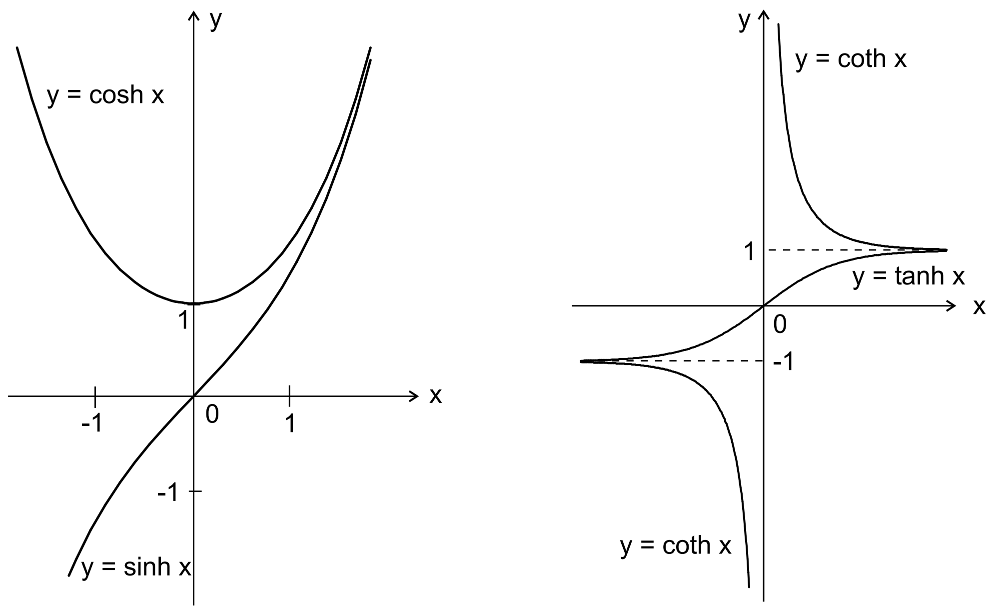
Hyperbelfunktionen

Definition

Die Hyperbelfunktionen Sinus Hyperbolicus, Cosinus Hyperbolicus, Tangens Hyperbolicus und Cotangens Hyperbolicus sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \tfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) &&: \mathbb{R} &&\rightarrow \mathbb{R},\\
\cosh x &= \tfrac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) &&: \mathbb{R} &&\rightarrow [1,\infty),\\
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} &&: \mathbb{R} &&\rightarrow (-1,1),\\
\coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} &&: \mathbb{R}\setminus\{0\} &&\rightarrow (-\infty,-1)\cup(1,\infty).
\end{aligned}$$

Hyperbelfunktionen



Interessant an den Hyperbelfunktionen ist, dass sie sich in mancher Hinsicht analog zu den trigonometrischen Funktionen verhalten. So gelten etwa die Gleichungen:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x_1 + x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 + \cosh x_1 \sinh x_2.$$

Beispiel

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}\right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.
\end{aligned}$$

Übung

Zeigen Sie:

$$\sinh(x_1+x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 + \cosh x_1 \sinh x_2.$$

Lösung

$$
\begin{aligned}
&\sinh x_1 \cosh x_2 + \cosh x_1 \sinh x_2 \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{x_1} - \mathrm{e}^{-x_1}\Big) \cdot \tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{x_2} + \mathrm{e}^{-x_2}\Big) + \tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{x_1} + \mathrm{e}^{-x_1}\Big) \cdot \tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{x_2} - \mathrm{e}^{-x_2}\Big) \\
&= \tfrac{1}{4}\Big(\mathrm{e}^{x_1+x_2} + \mathrm{e}^{x_1-x_2} - \mathrm{e}^{-x_1+x_2} - \mathrm{e}^{-x_1-x_2}\Big) \\
&\quad + \tfrac{1}{4}\Big(\mathrm{e}^{x_1+x_2} - \mathrm{e}^{x_1-x_2} + \mathrm{e}^{-x_1+x_2} - \mathrm{e}^{-x_1-x_2}\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{x_1+x_2} - \mathrm{e}^{-x_1-x_2}\Big) = \sinh(x_1 + x_2).
\end{aligned}
$$

Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen

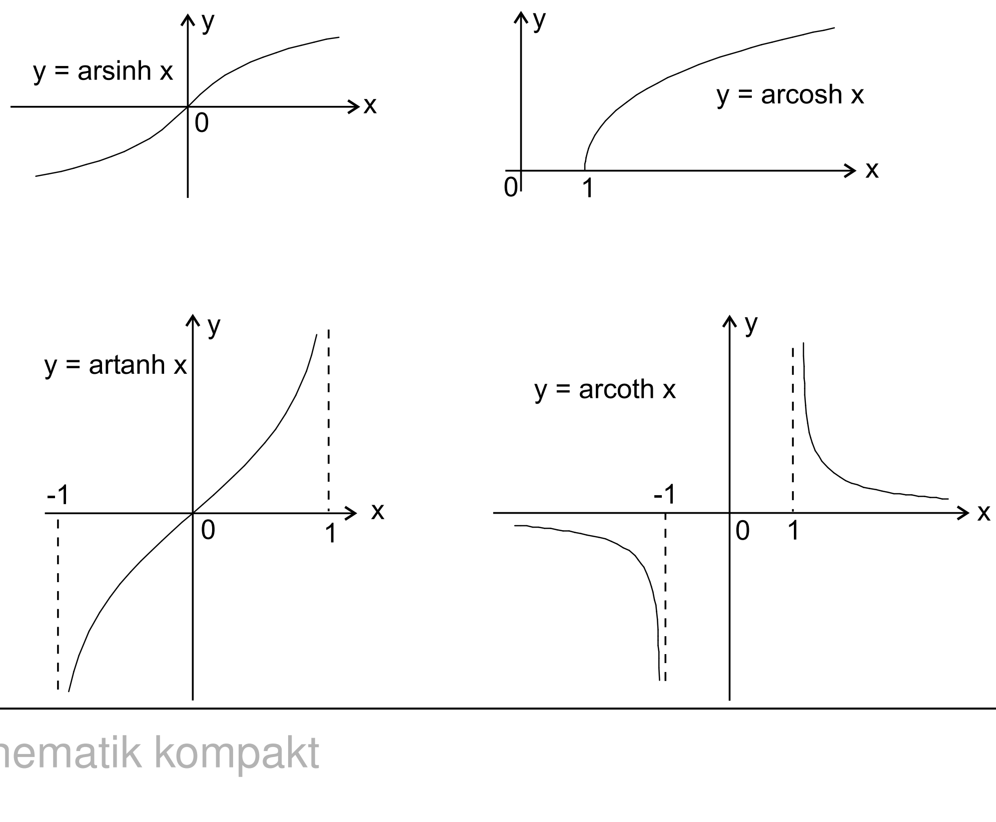
Für die streng monoton wachsenden Funktionen

$$\sinh x, \tanh x, \coth x$$

existieren entsprechend streng monoton wachsende Umkehrfunktionen

$$\operatorname{arsinh} x, \operatorname{artanh} x, \operatorname{arcoth} x.$$

Für den Cosinus Hyperbolicus gelingt die Umkehrung nur auf einer Einschränkung seines Definitionsbereiches, z.B. auf dem Monotoniebereich $[0, \infty)$. Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen werden auch *Areafunktionen* genannt.



Beispiel

Die Umkehrung der Sinus-Hyperbolicus-Funktion erhält man durch Auflösen von

$$x = \sinh y = 1/2\ (\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y})$$

nach y: Aus

$$\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y} = 2x$$

ergibt sich nach Multiplikation mit e^y:

$$\mathrm{e}^{2y} - 2x \cdot \mathrm{e}^y - 1 = 0.$$

Wenn man nun $u = \mathrm{e}^y$ setzt, so erhält man für u die quadratische Gleichung

$$u^2 - 2x \cdot u - 1 = 0.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung lauten

$$u_{1/2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Da die e-Funktion nur positive Werte annimmt, lautet die einzige Lösung $u = \mathrm{e}^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ bzw. nach y aufgelöst

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen

Definition

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen, auch Areafunktionen (Area Sinus Hyperbolicus etc.) genannt, sind auf folgenden Intervallen definiert:

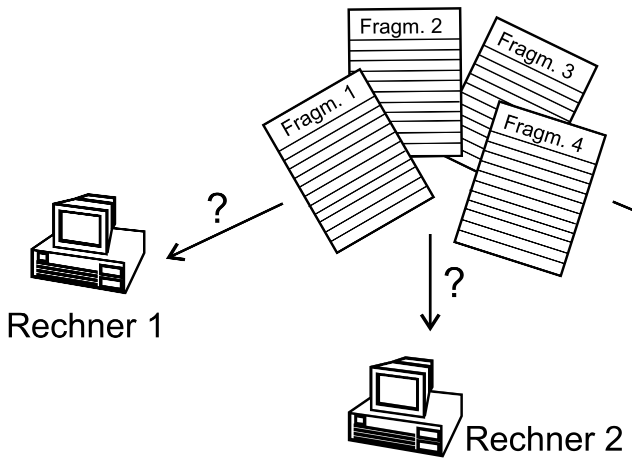
$$\begin{array}{lcllcl} \textbf{arsinh}\ x & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ \textbf{arcosh}\ x & : & [1,\infty) & \longrightarrow & [0,\infty), \\ \textbf{artanh}\ x & : & (-1,1) & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ \textbf{arcoth}\ x & : & \mathbb{R}\setminus[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{0\}. \end{array}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \textbf{arsinh}\ x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \\ \textbf{arcosh}\ x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \\ \textbf{artanh}\ x &= \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right), \\ \textbf{arcoth}\ x &= \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{x+1}{x-1}\right). \end{aligned}$$

Datenallokation in verteilten Datenbanksystemen

Speichert man auf einem *verteilten DB-System* eine große Tabelle mit vielen Daten, so kann man die Tabelle zeilenweise in mehrere Teile aufspalten: man erhält dann so genannte *Fragmente* der Tabelle. Die Informatik stellt hierzu Verfahren bereit, die zu einer anwendungs-adäquaten Aufspaltung $f = 1, \ldots, F$ in F Tabellen-Fragmente führen.



Das Problem besteht nun darin, die Fragmente so auf R Rechner ($r = 1, \ldots, R$) zu verteilen, dass die „Effizienz“ des Systems optimal wird.

Allokationsfunktion

Dieses *Allokationsproblem* ist dann gelöst, wenn es uns gelingt, eine „korrekte“ Allokationsfunktion $A(r, f)$ (in zwei Veränderlichen!) mit der Semantik

$$A(r, f) = \begin{cases} 1 & \text{, falls Fragment } f \text{ auf Rechner r gespeichert wird,} \\ 0 & \text{, falls Fragment } f \text{ \textit{nicht} auf Rechner r gespeichert wird,} \end{cases}$$

zu definieren. Um die Effizienz zu optimieren, muss nun der Kommunikationsaufwand zwischen den einzelnen Rechnern minimiert werden, d.h. die *lokalen Fragmentzugriffe sind zu maximieren*.

Lastverteilung

Anfallende DB-Manipulationen werden nach T verschiedenen *Transaktionstypen (TAT)* ($t = 1, \ldots, T$) klassifiziert.

Anhand von Praxisdaten ermittelt man nun eine Funktion L für die *Lastverteilung*:

$L(r, t)$ gibt an, wie oft der TAT t pro Sekunde durchschnittlich auf dem Rechner r gestartet wird.

Gehen wir beispielsweise von einem System mit 3 Rechnern ($R = 3$) und 3 TAT ($T = 3$) aus, so könnte L durch folgende Wertetabelle definiert sein (z.B. wird auf Rechner 2 der TAT 1 pro Sekunde durchschnittlich 8-mal aufgerufen):

$L(r, t)$:

$r \diagdown t$	1	2	3
1	7	0	10
2	8	5	0
3	0	6	5

Referenzfunktion

Anhand von Anwendungsdaten muss nun noch die so genannte *Referenzfunktion* R ermittelt werden.

$R(t, f)$ gibt die gemittelte Anzahl von Zugriffen auf das Fragment f an, die eine Ausführung des TAT t benötigt.

Gehen wir in unserem Beispiel von 4 Fragmenten ($F = 4$) aus, so könnte sich die durch die Wertetabelle definierte Referenzfunktion ergeben (z.B. benötigt der TAT 1 im Mittel 50 Zugriffe auf Fragment 3).

$R(t, f)$:

$t \setminus f$	1	2	3	4
1	80	0	50	90
2	70	90	0	0
3	0	60	0	60

Zugriffsberechnung

Mit Hilfe der Lastverteilung und der Referenzfunktion ist es nun möglich, die insgesamt durchschnittlich pro Sekunde anfallenden Zugriffe $Z(f)$ auf Fragment f zu berechnen:

$$Z(f) = \sum_{r=1}^{R} \sum_{t=1}^{T} L(r,t) \cdot R(t,f).$$

In unserem Beispiel ergibt sich für Fragment 4 folgende mittlere Anzahl von Zugriffen pro Sekunde:

$$Z(4) = \sum_{r=1}^{3} \sum_{t=1}^{3} L(r,t) \cdot R(t,4)$$

$$
\begin{aligned}
Z(4) &= \sum_{r=1}^{3}\sum_{t=1}^{3} L(r,t)\cdot R(t,4)\\
&= L(1,1)\cdot R(1,4) + L(1,2)\cdot R(2,4) + L(1,3)\cdot R(3,4)\\
&= L(2,1)\cdot R(1,4) + L(2,2)\cdot R(2,4) + L(2,3)\cdot R(3,4)\\
&= L(3,1)\cdot R(1,4) + L(3,2)\cdot R(2,4) + L(3,3)\cdot R(3,4)\\
&= \underbrace{7\cdot 90 + 0\cdot 0 + 10\cdot 60}_{\text{Rechner 1}} + \underbrace{8\cdot 90 + 5\cdot 0 + 0\cdot 60}_{\text{Rechner 2}} +\\
&\quad + \underbrace{0\cdot 90 + 6\cdot 0 + 5\cdot 60}_{\text{Rechner 3}}\\
&= 1230 + 720 + 300 = 2250.
\end{aligned}
$$

Analog berechnet man $Z(1)$, $Z(2)$ und $Z(3)$ und erhält für $Z(f)$ die Wertetabelle:

f	1	2	3	4
$Z(f)$	1970	1890	750	2250

Ganzzahliges Optimierungsproblem

Von diesen Zugriffen sind die vom Rechner r veranlassten aber nur dann lokal, wenn das Fragment f diesem zugewiesen wurde, d.h. falls $A(r,f) = 1$ gilt.

Die lokalen Zugriffe $ZL(f)$ auf Fragment f ergeben sich somit zu

$$ZL(f) = \sum_{r=1}^{R} \sum_{t=1}^{T} L(r,t) \cdot R(t,f) \cdot A(r,f).$$

Jetzt können wir das Allokationsproblem als *ganzzahliges Optimierungsproblem* modellieren:

Es ist eine Fragmentzuordnung — genauer eine Funktion $A(r,f)$ — zu finden, für die die Summe der lokalen Fragmentzugriffe maximal wird, d.h.

$$\sum_{f=1}^{F} ZL(f) = \text{ Max!}$$

Ganzzahliges Optimierungsproblem

Bedingungen dabei:

- Jedes Fragment muss genau einem Rechner zugeordnet werden, d.h.

$$\sum_{r=1}^{R} A(r,f) = 1 \quad \text{für alle } f = 1, \ldots, F,$$

- Auslastung der Rechner darf deren verfügbare Leistung nicht überschreiten, d.h. vorgegeben wird ein Prozentsatz der CPU-Leistungsgrenze.

Die Lösung dieses Problems ist sehr schwierig, so dass in der Praxis Heuristiken angewandt werden, die eine *suboptimale Lösung* liefern.

Heuristik

a) Setze zunächst $A(r, f) = 0$ für alle r, f (keine Allokation von Fragmenten).

b) Bestimme das Zugriffs-maximale, noch nicht allokierte Fragment f_{max} anhand von $Z(f)$.

c) Berechne für jeden Rechner die lokalen Zugriffe $ZL(f_{\text{max}})$, die sich durch Allokation von f_{max} an diesem Rechner ergeben würde und die sich daraus ergebende Erhöhung der CPU-Auslastung.

d) Ordne das Fragment dem Rechner mit dem maximalen Anteil an lokalen Zugriffen zu, ohne dass sich dabei eine Überschreitung der vorgegebenen CPU-Auslastung ergibt. $A(r, f)$ ist entsprechend zu ändern.

e) Falls noch weitere Fragmente allokiert werden müssen, so gehe zu Schritt b).

Im Beispiel — erster Schritt

Es ist $f_{\text{max}} = 4$ mit $Z(4) = 2250$.

Die potentiellen lokalen Zugriffe auf die jeweiligen Rechner kann man aus

$$Z(4) = 1230 + 720 + 300 = 2250$$

entnehmen:

$ZL(1) = 1230 > ZL(2) = 720 > ZL(3) = 300.$

Gemäß Schritt d) findet damit eine Zuordnung von Fragment 4 auf Rechner 1 statt.

Nehmen wir an, dass die Auslastungsgrenzen aller Rechner eingehalten sind, so ist diese Zuordnung korrekt, d.h. es wird $A(1, 4) := 1$ gesetzt.

Im Beispiel — Allokationsfunktion

Man erkennt, dass die Heuristik eine — wenn auch komplexe — Zuordnungsvorschrift für die Funktion $A(r, f)$ darstellt. Unter der Annahme, dass in keinem Schritt der Heuristik eine Überschreitung der vorgegebenen CPU-Auslastung auftritt, erhält man schließlich folgende Allokationsfunktion:

$$A(r, f): \quad \begin{array}{c|cccc} r \diagdown f & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Dies bedeutet, dass die Fragmente 1 und 3 dem Rechner 2 zugeteilt werden, das Fragment 2 dem Rechner 3. Das Einhalten der Forderung

$$\sum_{r=1}^{3} A(r, f) = 1 \quad \text{für alle } f = 1, \ldots, 4$$

erkannt man daran, dass in jeder Spalte der Wertetabelle lediglich eine 1 steht.

Funktionsauswertungen mittels Taschenrechner

Hauptfehlerquelle bei Auswertung der trigonometrischen Funktionen:

Benutzer hat z.B. Gradmaß eingeschaltet, gibt die entsprechenden Winkel aber im Bogenmaß ein (oder umgekehrt).

Auf fast allen Taschenrechnern kann man durch die $\boxed{\text{MODE}}$ -Taste oder durch $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{DRG}}$ spezifizieren, ob man mit DEG (=degree=Gradmaß) oder mit RAD (=radiant=Bogenmaß) rechnet.

$$sin(30^\circ) = 0.5, \ \ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0.8660254.$$

Taschenrechner gibt anders als Computeralgebra-Systeme (wie Maple oder Mathematica) nur Näherungswerte nicht exakte Werte aus wie etwa

$$\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Fehlender Cotangens

Bei den *trigonometrischen Funktionen* fällt auf, dass zwar Sinus, Cosinus und Tangens durch die entsprechenden Tasten $\boxed{\text{SIN}}$, $\boxed{\text{COS}}$ und $\boxed{\text{TAN}}$ vorhanden sind, dass aber der Cotangens fehlt. Hier sollte man z.B. die Formel für den Cotangens

$$\cot x = \frac{1}{\mathtt{tan}\, x}$$

verwenden.

Vorsicht ist geboten, da Tangens und Cotangens nicht für alle reellen Zahlen definiert sind. Dann melden viele Taschenrechner „Error“ wie z.B. „- E -“, etwa bei $\mathtt{tan}(-\frac{\pi}{2})$.

Arcusfunktionen

Man berechnet etwa Werte des Arcussinus über die beiden Tasten $\boxed{\text{SHIFT}}$ und $\boxed{\text{SIN}}$. Die zweite Belegung von Tasten steht meist über der Taste, wobei man hier vorsichtig sein muss: So bedeutet $\sin^{-1}$ keineswegs $\frac{1}{\sin}$, sondern die Umkehrfunktion des Sinus, also den Arcussinus.

$$\underline{\text{Bsp.:}} \quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.5235988$$

Man erhält nicht den exakten Wert, nämlich $\frac{\pi}{6}$, sondern eben die obige Näherung (wenn man Bogenmaß als „Mode" eingestellt hat!). Der Arcuscotangens fehlt, aber hier kann man ohne Probleme folgende Beziehung verwenden:

$$\text{arccot}\, x = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Wenn Sie etwa die Gleichung

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

lösen wollen, so tippen Sie in Ihren Taschenrechner $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{SIN}}$ (d.h. Arcussinus) $\frac{1}{2}$ ein und erhalten als Lösung

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.5235988.$$

Andere Lösungen von $\sin x = \frac{1}{2}$ erhält man nicht, weil bei Definition der Arcusfunktionen deren Wertebereiche geeignet eingeschränkt wurden, etwa beim Arcussinus auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Die Gleichung $\sin x = y$ hat bei gegebenem $y \in [-1, 1]$, etwa $y = \frac{1}{2}$, aber in jedem der Intervalle

$$I_k := [-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ genau eine Lösung.

Zweige der Umkehrfunktionen

$y = \sin x$ hat auch auf

$$I_k := [-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$$

eine Umkehrfunktion, die k–ter *Zweig* des Arcussinus heißt.

Die bereits definierte Umkehrfunktion $\arcsin x$ heißt *Hauptzweig*.

Man kann sich etwa graphisch klarmachen, dass für den k-ten Zweig des Arcussinus gilt:

$$\arcsin_k x = (-1)^k \arcsin x + k\pi.$$

Zweige der Umkehrfunktionen

Die weiteren Stellen, an denen der Sinus den Wert $\frac{1}{2}$ annimmt, sind:

$$
\begin{array}{lclclcl}
\ldots & & & & & & \\
\arcsin_{-2}\left(\frac{1}{2}\right) & = & (-1)^{-2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - 2\pi & = & \frac{\pi}{6} - 2\pi & = & -\frac{11}{6}\pi, \\
\arcsin_{-1}\left(\frac{1}{2}\right) & = & (-1)^{-1}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - 1\pi & = & -\frac{\pi}{6} - \pi & = & -\frac{7}{6}\pi, \\
\arcsin_{1}\left(\frac{1}{2}\right) & = & (-1)^{1}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 1\pi & = & -\frac{\pi}{6} + \pi & = & \frac{5}{6}\pi, \\
\arcsin_{2}\left(\frac{1}{2}\right) & = & (-1)^{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi & = & \frac{\pi}{6} + 2\pi & = & \frac{13}{6}\pi, \\
\ldots & & & & & &
\end{array}
$$

D.h. *alle* Lösungen der Gleichung $\sin x = \frac{1}{2}$ ergeben sich zu

$$y_k = (-1)^k \underbrace{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}_{=\frac{\pi}{6}} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zweige der Umkehrfunktionen

Analog gilt für die k-ten Zweige der übrigen Arcusfunktionen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arccos}_k x &= \arccos\left((-1)^k x\right) + k\pi, \\
\operatorname{arctan}_k x &= \arctan x + k\pi, \\
\operatorname{arccot}_k x &= \operatorname{arccot} x + k\pi.
\end{aligned}$$

Hyperbelfunktionen

Sie werden z.B. mit $\boxed{\text{HYP}}\boxed{\text{SIN}}$ für den Sinus Hyperbolicus angewählt. Auch hier fehlt der Cotangens Hyperbolicus. Man kann jedoch einfach die Formel

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x}$$

verwenden (Vorsicht: coth x ist nicht für $x = 0$ definiert!).

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen, die *Areafunktionen*, sind über Tastenkombinationen wie $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{HYP}}$ $\boxed{\text{SIN}}$ für den Area Sinus Hyperbolicus vorhanden.

Der Area Cotangens Hyperbolicus fehlt wiederum, er lässt sich aber durch eine der beiden folgenden Formeln auswerten:

$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right),$$

$$\operatorname{arcoth} x = \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exponential- und Potenzfunktion, Logarithmus

Bei der *Exponentialfunktion* und den *Logarithmen* sind auf dem Taschenrechner $\boxed{e^x}$ und $\boxed{\ln x}$ vorhanden.

Außerdem: dekadische Logarithmus $\log x$ und zugehörige Potenzfunktion 10^x. Daneben gibt es meist eine allgemeine Potenzfunktion x^y (oder y^x), ansonsten verwende man die Formeln

$$a^x = e^{x \ln a} \quad \text{oder} \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Man kann ungerade Wurzeln auch aus negativen Zahlen ziehen. Zum Beispiel ist $(-27)^{\frac{1}{3}} = -3$.

Häufig Fehlermeldung, da intern fälschlicherweise die Formel $(-27)^{-\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \ln(-27)}$ benutzt wird.

Abhilfe: Auswertung von $27^{\frac{1}{3}}$ und nachträgliche Berücksichtigung des Minuszeichens.