Kapitel 9

Die komplexen Zahlen

- Der Körper der komplexen Zahlen
- Die Gauß'sche Zahlenebene
- Algebraische Gleichungen
- Anwendungen

Die Definition der komplexen Zahlen

Definition

Die Zahl i mit $\mathrm{i}^2 := -1$ heißt imaginäre Einheit.
Die Menge $\mathbb{C} := \{z = x + \mathrm{i} \cdot y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ bezeichnet die Menge der komplexen Zahlen.
Man nennt $x = \mathrm{Re}\ z$ den Realteil, $y = \mathrm{Im}\ z$ den Imaginärteil der komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i} \cdot y$.

Beispiel

Die komplexe Zahl $z = 5 - 7\mathrm{i}$ *hat den Realteil* $\operatorname{Re} z = 5$ *und den Imaginärteil* $\operatorname{Im} z = -7$ *(und nicht den Imaginärteil* $-7\mathrm{i}$*). Die imaginäre Einheit* $\mathrm{i} = 0 + 1 \cdot \mathrm{i}$ *selbst hat den Realteil* $\operatorname{Re} \mathrm{i} = 0$ *und den Imaginärteil* $\operatorname{Im} \mathrm{i} = 1$*.*

Komplexe Zahlen werden gewöhnlich mit z, reelle Zahlen mit x oder y bezeichnet. Die imaginäre Einheit heißt übrigens in den technischen Disziplinen oft j, in „Mathematikerkreisen“ wird sie hingegen immer mit i abgekürzt.

Reelle und komplexe Zahlen
Zahlbereichserweiterung

Die komplexen Zahlen, deren Imaginärteil 0 ist, kann man mit den reellen Zahlen identifizieren. In diesem Sinne ist $\mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{C}$.
Komplexe Zahlen, deren Realteil 0 ist, nennt man rein-imaginär.

Beispiel
Die komplexe Zahl $\sqrt{2} + 0 \cdot \mathrm{i}$ *entspricht der reellen Zahl* $\sqrt{2}$. *Die (komplexe) Zahl* $-5/7\,\mathrm{i}$ *ist rein-imaginär. Die imaginäre Einheit* i *ist ebenfalls rein-imaginär.*

Gleichheit komplexer Zahlen

Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn sowohl ihr Realteil als auch ihr Imaginärteil übereinstimmen:

$$\boldsymbol{x_1 + \mathrm{i} \cdot y_1 = x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2}$$
$$\boldsymbol{\Longleftrightarrow}$$
$$\boldsymbol{x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2.}$$

Beispiel

Von den komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= 8/5 - 3/10\,\mathrm{i}, \\ z_2 &= 8/5 - 4/10\,\mathrm{i}, \\ z_3 &= \sqrt{3} - 0.3\mathrm{i}, \\ z_4 &= 1.6 - 0.3\mathrm{i} \end{aligned}$$

sind nur z_1 und z_4 gleich.

Die Grundrechenarten

Definition

$$(x_1 + \mathrm{i} \cdot y_1) + (x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2) := (x_1 + x_2) + \mathrm{i} \cdot (y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + \mathrm{i} \cdot y_1) - (x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2) := (x_1 - x_2) + \mathrm{i} \cdot (y_1 - y_2)$$

$$(x_1 + \mathrm{i} \cdot y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i} \cdot (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$(x_1 + \mathrm{i} \cdot y_1)/(x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2) := \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i} \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

(Division nur im Falle von $x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2 \neq 0$)

Die Grundrechenarten
Merkregeln

Die Definition der *Summe bzw. Differenz* zweier komplexer Zahlen ist jedenfalls „straightforward“: Man addiert bzw. subtrahiert jeweils sowohl die Real- als auch die Imaginärteile getrennt.

Die Definition der *Multiplikation* sieht kompliziert aus, folgt aber einfach aus den üblichen (aus dem reellen Rechnen bekannten) Regeln, wie man Klammern ausmultipliziert:

$$
\begin{aligned}
&(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) = \\
&\quad = \; x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot i \cdot y_2 + i \cdot y_1 \cdot x_2 + i \cdot y_1 \cdot i \cdot y_2 \\
&\quad = \; x_1 x_2 + i \cdot x_1 y_2 + i \cdot x_2 y_1 - y_1 y_2 \\
&\quad = \; (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i \cdot (x_1 y_2 + x_2 y_1),
\end{aligned}
$$

dabei wurde nur $i^2 = -1$ und das Umsortieren in Real- und Imaginärteil benutzt.

Die Grundrechenarten
Merkregeln (Fortsetzung)

Auf die Formel für die *Division* komplexer Zahlen kommen wir durch folgende Umformungen:

$$\frac{x_1 + \mathrm{i} \cdot y_1}{x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i} \cdot y_1) \cdot (x_2 - \mathrm{i} \cdot y_2)}{(x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2) \cdot (x_2 - \mathrm{i} \cdot y_2)}$$

$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + \mathrm{i} \cdot (x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \,.$$

Man erweitert also mit $(x_2 - \mathrm{i} \cdot y_2)$ und stellt fest, dass beim Ausmultiplizieren der Nenner reell wird. Das ist schon der ganze Trick!

Die Grundrechenarten
Beispiele

Beispiel

Für Addition und Subtraktion betrachten wir:

$$\begin{aligned}(3+4i)+(1-2i) &= (3+1)+(4-2)i\\ &= 4+2i,\\ (3+4i)-(1-2i) &= (3-1)+(4-(-2))i\\ &= 2+6i.\end{aligned}$$

Für die Multiplikation ergibt sich durch Ausmultiplizieren der Klammern:

$$\begin{aligned}&(3+4i)\cdot(1-2i) =\\ &\quad = \underbrace{3\cdot 1}_{3} + \underbrace{3\cdot(-2i)}_{-6i} + \underbrace{4i\cdot 1}_{4i} + \underbrace{4i\cdot(-2i)}_{-8i^2}\\ &\quad = 3-6i+4i+8\\ &\quad = (3+8)+(4-6)i = 11-2i\ .\end{aligned}$$

Die Grundrechenarten
Beispiele (Fortsetzung)

Und für die Division erhält man durch Erweitern mit $(1+2\mathrm{i})$*:*

$$\begin{aligned}\frac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} &= \frac{(3+4\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} \\ &= \frac{(3-8)+(4+6)\mathrm{i}}{1+2^2} \\ &= \frac{-5+10\mathrm{i}}{5} = -1+2\mathrm{i}\ .\end{aligned}$$

Übung

a) *Gegeben seien die komplexen Zahlen* $z_1 := -1 - 8\mathrm{i}$ *und* $z_2 := -2 - 3\mathrm{i}$*.*
Berechnen Sie $2z_1$, $2z_1 + z_2$, $z_2 - z_1$, $z_1 \cdot z_2$, z_1^2 $(:= z_1 \cdot z_1)$ *und* $z_1 : z_2$*.*

b) *Berechnen Sie die folgenden Potenzen von* i*:* i^2, i^3, i^4, i^5, i^6 *und* i^{27}*.*

Lösung

a)

$$
\begin{aligned}
2z_1 &= -2 - 16\mathrm{i}, \\
2z_1 + z_2 &= -4 - 19\mathrm{i}, \\
z_2 - z_1 &= -1 + 5\mathrm{i}, \\
z_1 \cdot z_2 &= -22 + 19\mathrm{i}, \\
z_1^2 &= -63 + 16\mathrm{i}, \\
z_1 : z_2 &= 2 + \mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}^2 &= -1, \\
\mathrm{i}^3 &= \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i} = (-1) \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}, \\
\mathrm{i}^4 &= \mathrm{i}^3 \cdot \mathrm{i} = (-\mathrm{i}) \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}^2 = -(-1) = 1, \\
\mathrm{i}^5 &= \mathrm{i}, \\
\mathrm{i}^6 &= -1, \\
\mathrm{i}^{27} &= \mathrm{i}^{6 \cdot 4 + 3} = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

Der Körper der komplexen Zahlen

Die komplexen Zahlen bilden bezüglich der Addition und Multiplikation einen Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Genau wie in $\mathbb{R}$ sind also in $\mathbb{C}$ die Körperaxiome (z.B. gewisse einfache Rechenregeln wie die Kommutativgesetze) erfüllt. Man rechnet mit anderen Worten wie gewohnt.

Keine Größer-/Kleiner-Beziehung in $\mathbb{C}$!

Anders als in $\mathbb{R}$ gibt es aber *keine Größer-/Kleiner-Beziehung in* $\mathbb{C}$. Man kann also zwei komplexe Zahlen nur auf Gleichheit/Ungleichheit untersuchen, nicht aber sinnvoll sagen, welche von beiden die größere ist.

Keine positiven oder negativen Zahlen in $\mathbb{C}$!

Außerdem gibt es keine positiven oder negativen komplexen Zahlen.

Es wäre also *falsch* zu sagen, dass $+\mathrm{i}$ positiv sei. Ebensowenig ist $+\mathrm{i}$ negativ.

Auch $-2\mathrm{i}$ ist weder positiv noch negativ!

Bedenken Sie dazu, dass das Produkt zweier positiver oder zweier negativer Zahlen stets positiv ist: Das Produkt von i mit sich selbst ergibt aber -1, also eine negative Zahl!

Die konjugiert-komplexe Zahl

Definition

Die komplexe Zahl

$$\overline{z} := x + \mathrm{i} \cdot (-y) = x - \mathrm{i} \cdot y$$

heißt die zu $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ konjugiert-komplexe Zahl.

Für die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z}$ ist auch die Abkürzung z^* gebräuchlich.

Beispiel

Die zu $z_1 = -7 - 8\mathrm{i}$ *konjugiert-komplexe Zahl lautet* $\overline{z_1} = -7 + 8\mathrm{i}$*.*

Für $z_2 = 4\mathrm{i} = 0 + 4 \cdot \mathrm{i}$ *gilt* $\overline{z_2} = -4\mathrm{i} = -z_2$*.*

Für $z_3 = -17 = -17 + 0 \cdot \mathrm{i}$ *ist* $\overline{z_3} = -17 = z_3$*.*

Merkregel für die Division komplexer Zahlen

Man dividiert, indem man durch Erweitern mit dem Konjugiert-Komplexen des Nenners diesen Nenner reell macht.

Rechenregel für konjugiert-komplexe Zahlen

Mit $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ und $\overline{z} = x - \mathrm{i} \cdot y$ gilt für konjugiert-komplexe Zahlen die folgende Rechenregel:

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \text{ ist stets reell und } \geq 0.$$

Dies kann man durch einfaches Nachrechnen zeigen:

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (x + \mathrm{i}y) \cdot (x - \mathrm{i}y) \\ &= x \cdot x + x \cdot (-\mathrm{i}y) + \mathrm{i}y \cdot x + \mathrm{i}y \cdot (-\mathrm{i}y) \\ &= x^2 - \mathrm{i}xy + \mathrm{i}xy - \mathrm{i}^2 y^2 \\ &= x^2 + y^2 \,. \end{aligned}$$

Übung

a) *Gegeben sei die komplexe Zahl* $z_0 = 1 - 2\mathrm{i}$. *Geben Sie an bzw. berechnen Sie:* $\mathrm{Re}\,(z_0)$, $\mathrm{Im}\,(z_0)$, $\overline{z_0}$, $\mathrm{Re}\,(1/z_0)$, $\mathrm{Im}\,(\mathrm{i}\cdot\overline{z_0})$, $\overline{\mathrm{Im}\,(z_0)}$, $\overline{\mathrm{i}\cdot\mathrm{Re}\,(z_0)}$.

b) *Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen* $z = x + \mathrm{i}\cdot y$ *mit* $\mathrm{Im}\,(2\overline{z} + z) = 1$.

Lösung

a)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\,(z_0) = 1,\\
&\mathrm{Im}\,(z_0) = -2,\\
&\overline{z_0} = 1 + 2\mathrm{i},\\
&\mathrm{Re}\,(1/z_0) = 1/5,\\
&\mathrm{Im}\,(\mathrm{i}\cdot\overline{z_0}) = 1,\\
&\overline{\mathrm{Im}\,(z_0)} = -2,\\
&\overline{\mathrm{i}\cdot\mathrm{Re}\,(z_0)} = -\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

b) Alle komplexen Zahlen $z = x + \mathrm{i}\cdot y$ mit Imaginärteil $y = -1$.

Rechenregeln für konjugiert-komplexe Zahlen

Mit $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ und $\overline{z} = x - \mathrm{i} \cdot y$ gilt:

a) Genau für reelle z ist $z = \overline{z}$.

b) Das Bilden der konjugiert-komplexen Zahl ist mit allen vier Grundrechenarten vertauschbar:

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2}, \\
\overline{z_1 - z_2} &= \overline{z_1} - \overline{z_2}, \\
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \\
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}
\end{aligned}$$

(Division nur im Falle von $z_2 \neq 0$).

Übung

Beweisen Sie: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Lösung

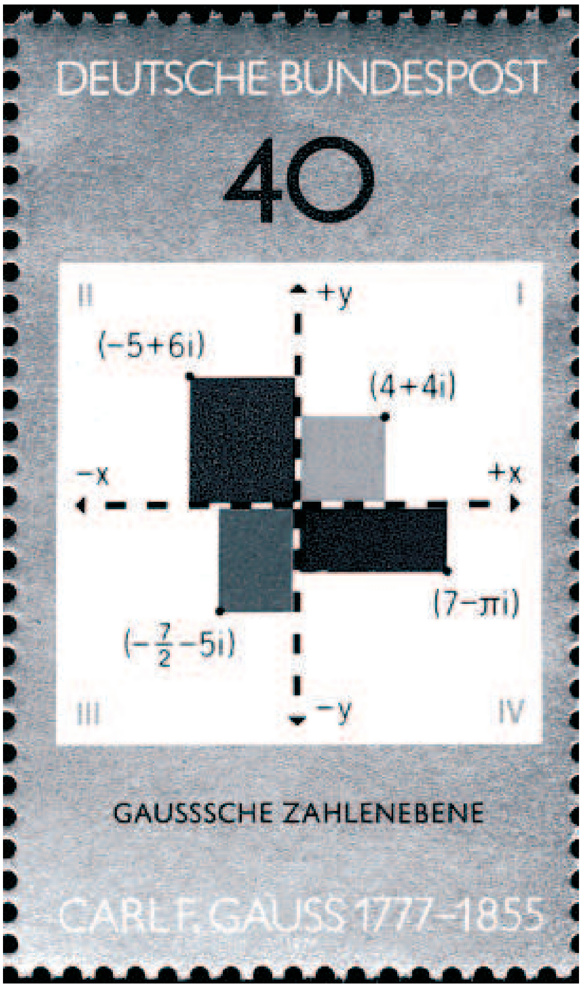
Mit $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ *und* $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ *ist:*

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1 + \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}y_2)} \\
&= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)} \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) - \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)\ .
\end{aligned}$$

Umgekehrt gilt:

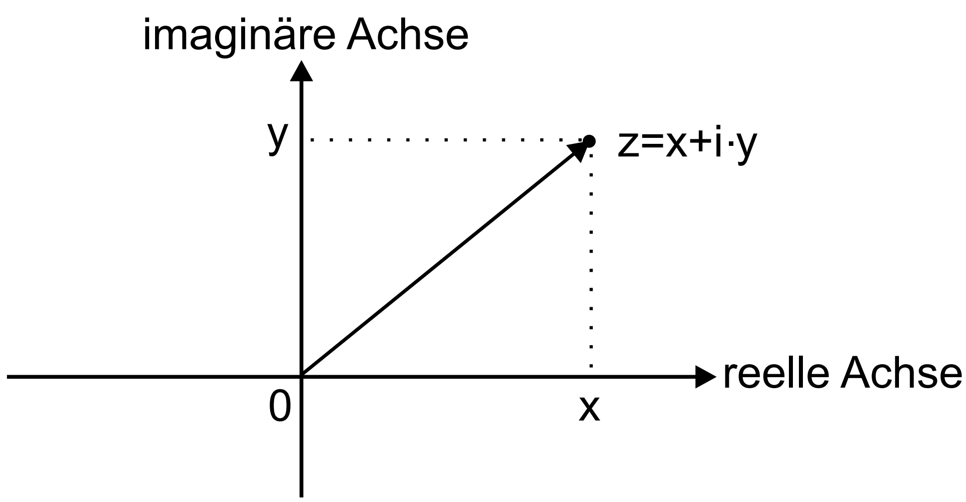
$$\begin{aligned}
\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1).
\end{aligned}$$

Die Gauß'sche Zahlenebene als Briefmarke



Die Gauß'sche Zahlenebene

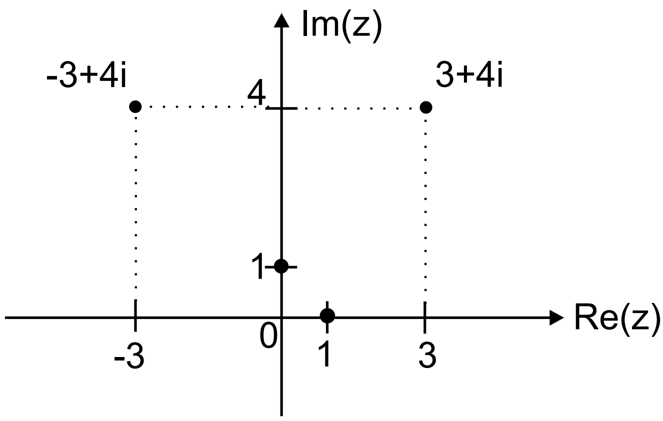
Jeder komplexen Zahl $z = x+\mathrm{i}\cdot y$ entspricht genau ein Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzw. genau ein Punkt (x, y) der Ebene und umgekehrt.



In der Technik spricht man anstelle von Ortsvektoren häufig von *Zeigern* auf komplexe Zahlen.

Beispiel

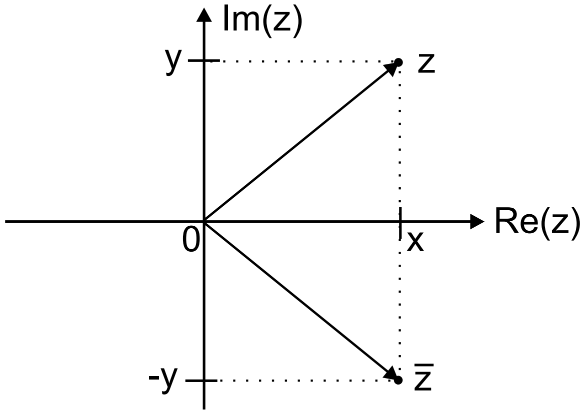
a) *Der komplexen Zahl* $z = -3 + 4\mathrm{i}$ *entspricht der Punkt* $(-3, 4)$*;* $z = 1$ *entspricht der Punkt* $(1, 0)$*;* $z = \mathrm{i}$ *entspricht der Punkt* $(0, 1)$*;* $z = 0$ *entspricht der Punkt* $(0, 0)$*, der Ursprung des Koordinatensystems.*



b) *Genau für* reelle Zahlen z *gilt* $\mathrm{Im}\, z = 0$*; sie werden durch die Punkte der* reellen Achse *dargestellt.* Rein-imaginäre Zahlen *(*$\mathrm{Re}\, z = 0$*) werden durch die Punkte der* imaginären Achse *veranschaulicht.*

Beispiel

a) *Den zur* konjugiert-komplexen Zahl $\overline{z} = x - \mathrm{i} \cdot y$ *gehörigen Ortsvektor findet man durch Spiegelung des zu $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ gehörigen Ortsvektors an der reellen Achse:*



b) *Punkte in der Gauß'schen Zahlenebene und folglich die komplexen Zahlen kann man nicht linear anordnen (keine Größer-/Kleiner-Beziehung!).*

Rechenoperationen in $I\!R \times I\!R$

Wenn wir

$$z = x + \mathrm{i} \cdot y = (x, y)$$

setzen und Addition und Multiplikation umschreiben, so erhalten wir für die Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ auf $I\!R \times I\!R = \{(x, y) | x, y \in I\!R\}$ die folgende Darstellung:

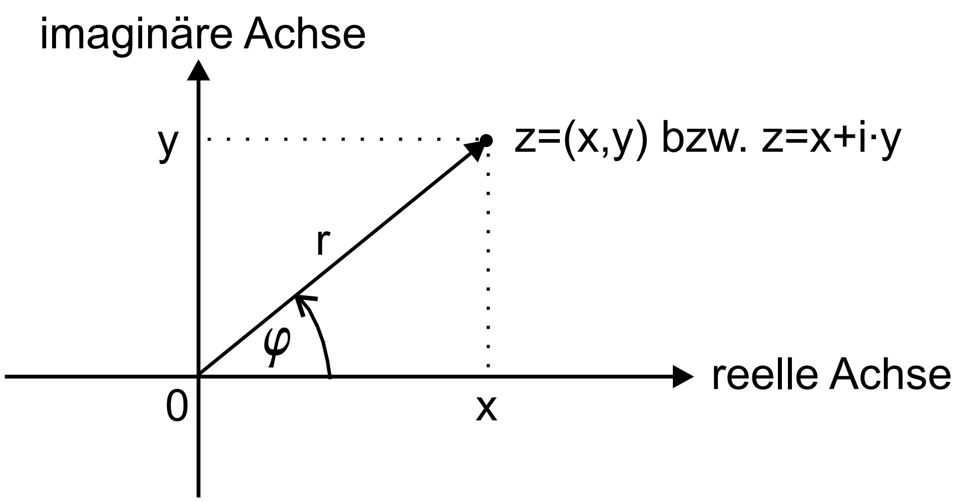
$$\begin{aligned}
&(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\
&\quad = \ (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\
&(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \\
&\quad = \ (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).
\end{aligned}$$

Die erste der beiden obigen Gleichungen besagt, dass die Addition komplexer Zahlen wie die Addition von Vektoren in der Ebene (Kräfteparallelogramm!) vorgenommen wird.

Polarkoordinaten

Die Lage eines Punktes der Ebene lässt sich durch seinen Abstand r („Radius“) vom Koordinatenursprung und, wenn $r > 0$, durch den Winkel φ des Ortsvektors mit der positiven x-Achse („Polarwinkel“) kennzeichnen.

(Im Fall $r = 0$, am Koordinatenursprung also, lässt sich φ nicht definieren.)



Winkel

Winkel werden meist in *Bogenmaß* angegeben. Das bekannte Gradmaß $\widehat{\varphi}$ (Einheit: Grad) und das Bogenmaß φ (Einheit: Radiant) hängen dabei wie folgt zusammen:

$$\frac{\widehat{\varphi}}{360^\circ} = \frac{\varphi}{2\pi} \; .$$

Da der Winkel nur bis auf Vielfache von 2π (bzw. 360°) bestimmt ist, legt man willkürlich ein Intervall fest, in dem der Winkel angeben wird, z.B.

$$-\pi < \varphi \leq +\pi \; .$$

Umrechnungsformeln

Die *Umrechnungsformeln zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten* lauten:

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad \text{und} \qquad y = r \cdot \sin\varphi$$

sowie

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{und} \qquad \varphi = \pm \arccos\left(\frac{x}{r}\right).$$

(Vorzeichen von φ je nachdem ob $y \geq 0$ oder $y < 0$.)

Man könnte hier auch die Beziehung $\tan\varphi = y/x$ verwenden, müßte aber bei der Umkehrfunktion $\arctan(y/x)$ vier Fallunterscheidungen, je nach Quadrant, in dem (x, y) liegt, durchführen.

Beispiel
Aus den kartesischen Koordinaten $x = -3$ *und* $y = 4$ *der komplexen Zahl* $z = -3 + 4\mathrm{i}$ *ergeben sich die Polarkoordinaten* $r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ *und* $\varphi = +\arccos(-3/5) \approx 2.214$ *(bzw.* $\hat{\varphi} \approx 126.87°$*).*

Aus den Polarkoordinaten $r = 4$ *und* $\phi = -\pi/6$ $(\hat{\varphi} = -30°)$ *erhält man die kartesischen Koordinaten* $x = 4 \cdot \cos(-\pi/6) = 4 \cdot 1/2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ *und* $y = 4 \cdot \sin(-\pi/6) = 4 \cdot (-1/2) = -2$ *der komplexen Zahl* $z = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$*.*

Übung

a) *Geben Sie die Polarkoordinaten* r *und* φ *der folgenden komplexen Zahlen an:* $z_1 = 7$, $z_2 = 4\mathrm{i}$, $z_3 = -6$, $z_4 = -3\mathrm{i}$, $z_5 = 1 - \mathrm{i}$.

b) *Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten der komplexen Zahl* z_6 *mit den Polarkoordinaten* $r = 2$, $\varphi = \pi/3$.

Lösung

a)

$$\begin{array}{ll} r_1 = 7, & \varphi_1 = 0; \\ r_2 = 4, & \varphi_2 = \pi/2; \\ r_3 = 6, & \varphi_3 = \pi; \\ r_4 = 3, & \varphi_4 = -\pi/2; \\ r_5 = \sqrt{2}, & \varphi_5 = -\pi/4. \end{array}$$

b) $x_6 = 1$, $y_6 = \sqrt{3}$.

Betrag einer komplexen Zahl

Anstelle vom Radius und Polarwinkel bei Polarkoordinaten wird im Zusammenhang mit komplexen Zahlen meist vom *(Absolut-) Betrag* und vom *Argument (oder Arcus oder Phase oder Winkel)* einer komplexen Zahl gesprochen:

Definition

Unter dem Betrag einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ versteht man

$$|z| = |x + \mathrm{i} \cdot y| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

Beispiel

Der Betrag der komplexen Zahl $z = -3 + 4\mathrm{i}$ *ist gleich* 5 *und das Argument von* z *ist ungefähr* 2.214.

Veranschaulichung

Der Betrag einer komplexen Zahl ist anschaulich gesprochen die Länge ihres Ortsvektors bzw. ihr Abstand vom Nullpunkt.

Der Term $|z_1 - z_2|$, der Betrag von $z_1 - z_2$ also, steht für den Abstand der beiden Zahlen (d.h. Punkte im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) z_1 und z_2.

Rechenregeln für den Betrag

a) $|z| \geq 0; \quad |z| = 0 \iff z = 0,$

b) $|\overline{z}| = |z|,$

c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
(Dreiecksungleichung),

d) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$

e) $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$ **falls** $z_2 \neq 0.$

Übung

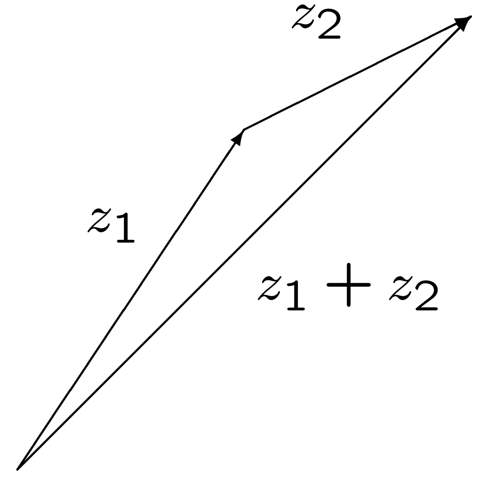
a) *Zeigen Sie:* $|\overline{z}| = |z|$. *Was bedeutet dies geometrisch?*

b) *Was besagt die Dreiecksungleichung anschaulich?*

Lösung

a) *Es sei* $z := x + \mathrm{i} \cdot y$*. Dann ist* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ *und* $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$*. Die Ortsvektoren von* $|z|$ *und* $|\overline{z}|$*, welche durch Spiegelung an der* x*-Achse auseinander hervorgehen, sind gleich lang.*

b) *Die Länge des Vektors von* $z_1 + z_2$ *(Hypotenuse des Dreiecks in Abb.) ist kleiner/gleich der Summe der Längen von* z_1 *und* z_2 *(Katheten des Dreiecks in Abb.).*



Die Polarform komplexer Zahlen

Die bisher in kartesischer Normalform gegebene komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ lässt sich bei Verwendung von Polarkoordinaten in der Polarform schreiben:

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)$$

Die Umrechnung erfolgt gemäß den Formeln für die Transformation zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten.

Beispiel
Es gilt:

$$\begin{aligned} z &= -3 + 4\mathrm{i} \\ &\approx 5 \cdot [\cos(2.214) + \mathrm{i} \cdot \sin(2.214)] \,. \end{aligned}$$

Dabei ist $-3 + 4\mathrm{i}$ *die Normalform und* $5 \cdot [\cos(2.214) + \mathrm{i} \cdot \sin(2.214)]$ *die Polarform der komplexen Zahl* z*.*

Umgekehrt:

$$\begin{aligned} & 4 \cdot [\cos(-\pi/6) + \mathrm{i} \cdot \sin(-\pi/6)] \\ &= 4 \cdot \left(\sqrt{3}/2 + \mathrm{i} \cdot (-1/2)\right) \\ &= 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}. \end{aligned}$$

In diesem Fall wurde ausgehend von der Polarform auf die Normalform der komplexen Zahl umgerechnet.

Weitere Beispiele

Weitere Beispiele für die Polarform komplexer Zahlen sind:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i} &= 1 &\cdot\ & [\cos(\pi/2) + \mathrm{i} \cdot \sin(\pi/2)]\,, \\
1 + \mathrm{i} &= \sqrt{2} &\cdot\ & [\cos(\pi/4) + i \cdot \sin(\pi/4)]\,, \\
-7 &= 7 &\cdot\ & [\cos \pi + \mathrm{i} \cdot \sin \pi]\,.
\end{aligned}
$$

Dabei sieht die Polarform von -7 *nur auf den ersten Blick erstaunlich aus!*

Übung

Geben Sie die Polarform der folgenden komplexen Zahlen an: $z_1 = 7$, $z_2 = 4\mathrm{i}$, $z_3 = -6$, $z_4 = -3\mathrm{i}$, $z_5 = 1 - \mathrm{i}$.

Lösung

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \quad 7 &&= 7 \cdot [\cos 0 + \mathrm{i} \cdot \sin 0]\,, \\
z_2 &= \quad 4\mathrm{i} &&= 4 \cdot [\cos(\pi/2) + \mathrm{i} \cdot \sin(\pi/2)]\,, \\
z_3 &= \quad -6 &&= 6 \cdot [\cos \pi + \mathrm{i} \cdot \sin \pi]\,, \\
z_4 &= \quad -3\mathrm{i} &&= 3 \cdot [\cos(-\pi/2) + \mathrm{i} \cdot \sin(-\pi/2)]\,, \\
z_5 &= \quad 1 - \mathrm{i} &&= \sqrt{2} \cdot [\cos(-\pi/4) + \mathrm{i} \cdot \sin(-\pi/4)]\,.
\end{aligned}
$$

Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Die Polarform erlaubt nun eine sehr prägnante Beschreibung der Multiplikation und Division komplexer Zahlen:

Für die Zahlen $z_1 := |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi_1)$ und $z_2 := |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi_2)$ gilt:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$z_1 / z_2 = |z_1| / |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

(Division nur im Falle von $z_2 \neq 0$).

Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Der Beweis dieses Satzes ist schlichtweg trivial; man benötigt nur die aus der Schule bekannten Additionstheoreme von Sinus und Cosinus:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi_1) \\ &\qquad \cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi_2) \\ &= |z_1||z_2| \cdot \Bigg[\underbrace{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}_{=\cos(\varphi_1+\varphi_2)} \\ &\qquad + \mathrm{i}\cdot\underbrace{(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi 2)}_{=\sin(\varphi_1+\varphi_2)}\Bigg]. \end{aligned}$$

Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen werden multipliziert (dividiert), indem man ihre Beträge multipliziert (dividiert) und ihre Winkel addiert (subtrahiert) — und den resultierenden Winkel evtl. auf das Intervall $(-\pi, +\pi]$ reduziert.

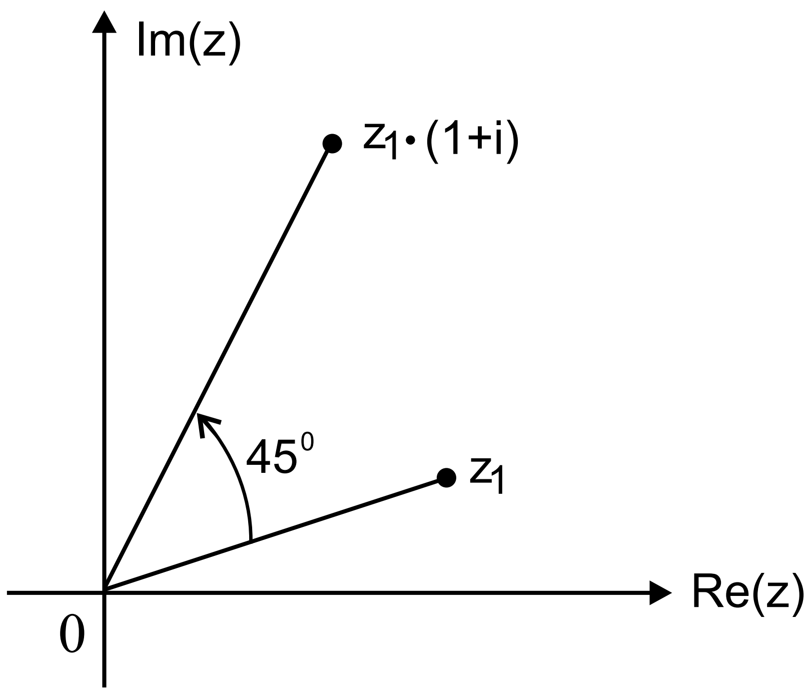
Multiplikation und Division komplexer Zahlen
Drehstreckung

Geometrisch kann die Multiplikation komplexer Zahlen als *Drehstreckung* beschrieben werden:

Multipliziert man eine komplexe Zahl z_1 mit einer komplexen Zahl z_2, so wird der Betrag von z_1 um den Faktor $|z_2|$ „gestreckt“ (oder „gestaucht“), der Winkel von z_1 wird um den Winkel von z_2 „weitergedreht“.

Beispiel

Multiplikation einer Zahl z_1 *mit der Zahl* $z_2 = 1 + \mathrm{i}$ *bedeutet (wegen* $|z_2| = \sqrt{2}, \varphi_2 = \arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4 = 45^\circ$*): Der Ortvektor der Zahl* z_1 *wird um* $\sqrt{2}$ *gestreckt und um* 45° *(im mathematischen, also im Gegenuhrzeigersinn) gedreht.*



Übung

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ *und* $z_2 = -1 + 2\mathrm{i}$.

a) *Führen Sie zunächst* z_1 *und* z_2 *in Polarform über und berechnen Sie* $z_1 \cdot z_2$.

b) *Berechnen Sie* $z_1 \cdot z_2$ *in Normalform und führen Sie dann das Ergebnis in Polarform über.*

c) *Interpretieren Sie* $z_1 \cdot z_2$ *als Drehstreckung in der Gauß'schen Zahlenebene.*

Lösung

a) $z_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{4}\right)$,

$z_2 = \sqrt{5} \cdot (\cos 2.034 + \mathrm{i} \sin 2.034)$,

$$z_1 \cdot z_2 \\ = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \left(\cos(\tfrac{\pi}{4} + 2.034) + \mathrm{i} \sin(\tfrac{\pi}{4} + 2.034)\right) \\ = \sqrt{10} \cdot (\cos 2.819 + i \sin 2.819).$$

b) $z_1 \cdot z_2 = (1 + \mathrm{i}) \cdot (-1 + 2\mathrm{i}) = -3 + \mathrm{i}$
$= \sqrt{10} \cdot (\cos 2.819 + \mathrm{i} \sin 2.819)$.

c) *Multiplikation mit z_2 entspricht Streckung um Faktor $\sqrt{5}$ und (ungefähre) Drehung um Winkel* 2.034.

Die Euler'sche Beziehung

Für den Term $\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi$ bietet sich eine Abkürzung an. Wir benutzen dazu die folgende Gleichung, die so genannte *Euler'sche Beziehung*:

$$\boxed{\mathbf{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi}}$$

Obige Gleichung ist zunächst als bloße Abkürzung zu sehen; es steckt aber noch ein tiefer liegender mathematischer Sachverhalt dahinter: s.Reihen.

Exponentialform von komplexen Zahlen

Die bisher in Polarform gegebene komplexe Zahl

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)$$

lässt sich unter Verwendung der Euler'schen Beziehung nun in der Exponentialform schreiben:

$$z = |z| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \ .$$

Der Anteil $|z|$ beschreibt dabei die Länge des Ortsvektors von z, der Anteil $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ allein den Winkel: $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}| = 1$.

Beispiel

$$
\begin{aligned}
-3 + 4\mathrm{i} &\approx 5 \cdot (\cos 2.214 + \mathrm{i} \cdot \sin 2.214) \\
2\sqrt{3} - 2\mathrm{i} &= 4 \cdot (\cos(-\pi/6) + \mathrm{i} \cdot \sin(-\pi/6)) \\
\mathrm{i} &= 1 \cdot (\cos(\pi/2) + \mathrm{i} \cdot \sin(\pi/2)) \\
1 + \mathrm{i} &= \sqrt{2} \cdot (\cos(\pi/4) + \mathrm{i} \cdot \sin(\pi/4)) \\
-7 &= 7 \cdot (\cos \pi + \mathrm{i} \cdot \sin \pi)
\end{aligned}
$$

Übung

Geben Sie die Exponentialform der folgenden komplexen Zahlen an: $z_1 = 7$, $z_2 = 4\mathrm{i}$, $z_3 = -6$, $z_4 = -3\mathrm{i}$, $z_5 = 1 - \mathrm{i}$.

Lösung

$$\begin{aligned}
z_1 &= 7 &&= 7 \cdot \mathrm{e}^{0\mathrm{i}}, \\
z_2 &= 4\mathrm{i} &&= 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}, \\
z_3 &= -6 &&= 6 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}, \\
z_4 &= -3\mathrm{i} &&= 3 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}, \\
z_5 &= 1 - \mathrm{i} &&= \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}.
\end{aligned}$$

Satz von Moivre

Die „Abkürzung“ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ hat den großen Vorteil, dass man mit ihr wie mit einer „richtigen Potenz“ rechnen kann:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\varphi)} \qquad \textbf{(Satz von Moivre)}$$

Potenzen komplexer Zahlen

Die Exponentialform komplexer Zahlen ist besonders hilfreich, wenn man etwa *Potenzen komplexer Zahlen* berechnen will.

Beispiel

$$(1-\mathrm{i})^6 = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,6\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= 8 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = 8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{2}+2\pi\right)} = 8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$
$$= 8\mathrm{i}.$$

Übung

Berechnen Sie $(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^6$ *und* $(1+\mathrm{i})^4$*. Benutzen Sie dazu die Darstellung komplexer Zahlen in Exponentialform!*

Lösung

$$\begin{aligned}\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^6 &= \left(2\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{3})}\right)^6 = 2^6\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{6\pi}{3})}\\ &= 2^6\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-2\pi)} = 2^6\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 64,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^4 &= \left(\sqrt{2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \sqrt{2}^4\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\frac{\pi}{4}}\\ &= 4\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -4.\end{aligned}$$

Lösbarkeit quadratischer Gleichungen

Die Gleichung $a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$ mit den Koeffizienten $a_2 \neq 0$, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ lässt sich zunächst *normieren*: $z^2 + (a_1/a_2)z + a_0/a_2 = 0$, wofür wir

$$z^2 + p \cdot z + q = 0$$

schreiben. Durch quadratische Ergänzung erhält man

$$z^2 + p \cdot z + \frac{p^2}{4} = -q + \frac{p^2}{4}$$

oder

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q\ .$$

Der Term $D := p^2/4 - q$ heißt *Diskriminante*, da sich an ihm festmachen lässt, ob zwei Lösungen, eine oder keine (reelle) Lösung vorliegen.

Lösbarkeit quadratischer Gleichungen (Fortsetzung)

Im Einzelnen gilt:

- Für $D > 0$ gibt es zwei verschiedene reelle Lösungen:
$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \, .$$

- Für $D = 0$ gibt es eine (man sagt: doppelt auftretende) reelle Lösung:
$$z = -\frac{p}{2} \, .$$

- Für $D < 0$ existiert bekanntlich keine reelle Lösung. Aber da wir mit Hilfe der imaginären Einheit i inzwischen auch Gleichungen der Form $z^2 + 1 = 0$ oder $z^2 = -1$ lösen können, da also i mit anderen Worten Wurzel aus der negativen Zahl -1 ist, können wir nun auch Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen und finden Lösungen für $D < 0$: Für $D < 0$, d. h. $-D > 0$, gibt es zwei konjugiert-komplexe Lösungen:
$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \mathrm{i} \cdot \sqrt{-D} \, .$$

Lösbarkeit quadratischer Gleichungen

Beispiel

$a)$ $z^2 + z - 12 = 0$:

Diskriminante: $D = \frac{1^2}{4} - (-12) = \frac{1}{4} + 12 = 12.25 > 0$

$\Longrightarrow$ 2 verschiedene reelle Lösungen

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z_{1/2} & = & -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (-12)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} \\ & = & -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}, \end{array} \right.$$

also Lösungen: $z_1 = 3, \qquad z_2 = -4,$

und es gilt: $z^2 + z - 12 = (z-3) \cdot (z+4)\,.$

Lösbarkeit quadratischer Gleichungen

Beispiel

$b)$ $z^2 + 14z + 49 = 0$:

Diskriminante: $D = \frac{14^2}{4} - 49 = 49 - 49 = 0$

$\Longrightarrow$ 1 (doppelt auftretende) reelle Lösung

$\Longrightarrow$ $z_{1/2} = -\frac{14}{2} \pm \sqrt{0} = -7,$

also Lösungen: $z_1 = z_2 = -7,$

und es gilt: $z^2 + 14z + 49 = (z+7) \cdot (z+7)\,.$

Lösbarkeit quadratischer Gleichungen

Beispiel

$c)$ $z^2 + 4z + 13 = 0$:

Diskriminante: $D = \frac{4^2}{4} - 13 = 4 - 13 = -9 < 0$

$\Longrightarrow$ 2 konjugiert-komplexe Lösungen

$$\Longrightarrow \begin{cases} z_{1/2} & = \left\{ -\frac{4}{2} \pm \mathrm{i} \cdot \sqrt{-(-9)} = -2 \pm \mathrm{i}\sqrt{9} \right. \\ & = -2 \pm \mathrm{i} \cdot 3, \end{cases}$$

also Lösungen: $z_1 = -2 + 3\mathrm{i}, \qquad z_2 = -2 - 3\mathrm{i},$
und es gilt: $z^2 + 4z + 13 = (z - (-2 + 3\mathrm{i})) \cdot (z - (-2 - 3\mathrm{i}))\,.$

Die Probe liefert:

$$(z - (-2 + 3\mathrm{i})) \cdot (z - (-2 - 3\mathrm{i})) = ((z + 2) - 3\mathrm{i}) \cdot ((z + 2) + 3\mathrm{i})$$
$$= (z + 2)^2 - (3\mathrm{i})^2 = z^2 + 4z + 4 - (-9) = z^2 + 4z + 13.$$

Übung

Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{lrcl} a) & z^2+6z+9 & = & 0, \\ b) & 2z^2+9z-5 & = & 0, \\ c) & 4z^2+8z+29 & = & 0, \\ d) & 4z^2+17 & = & 0. \end{array}$$

Lösung

$$\begin{array}{llll} a) & z_1 = -3, & & z_2 = -3, \\ b) & z_1 = \frac{1}{2}, & & z_2 = -5, \\ c) & z_1 = -1+5/2\mathrm{i}, & & z_2 = -1-5/2\mathrm{i}, \\ d) & z_1 = \sqrt{17}\mathrm{i}/2, & & z_2 = -\sqrt{17}\mathrm{i}/2. \end{array}$$

Komplexe Polynome

Definition

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_n\ (\neq 0), a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ heißt die Funktion $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto P(z)$ mit

$$P(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

komplexes Polynom n-ten Grades mit den (im Allgemeinen) komplexen Koeffizienten a_k.

Beispiel
Die Funktion

$$P(z) = z^4 + (-3 + \mathrm{i})\, z^2 - \mathrm{i}z + 3$$

ist ein Polynom 4.Grades mit den Koeffizienten $a_4 = 1$, $a_3 = 0$, $a_2 = -3 + \mathrm{i}$, $a_1 = -\mathrm{i}$ *und* $a_0 = 3$.

Man kann für z *eine beliebige komplexe Zahl einsetzen und erhält als Funktionswert* $P(z)$ *wiederum eine komplexe Zahl, z.B.* $P(2) = 7 + 2\mathrm{i}$ *und* $P(1 + 2\mathrm{i}) = 3 - 40\mathrm{i}$.

Komplexe Nullstellen und Linearfaktoren

Analog zum Reellen:

Definition

Die (komplexe) Zahl z_1 heißt Nullstelle des (komplexen) Polynoms $P(z)$, wenn gilt:

$$P(z_1) = 0.$$

Es gilt wie im Reellen:

Ist z_1 eine Nullstelle des Polynoms $P(z)$ vom Grade $n > 0$, so kann man den Linearfaktor $(z - z_1)$ ohne Rest abdividieren:

$$P(z) = (z - z_1) \cdot P_1(z).$$

Dabei ist $P_1(z)$ ein Polynom $(n - 1)$-ten Grades.

Beispiel

Das (komplexe) Polynom $P(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 9z - 10$ *hat (u.a.) die Nullstelle* $z_1 = 1$. *Polynomdivision liefert*

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(z^4 & -z^3 & +z^2 & +9z & -10) & : \ (z-1) \ = z^3 + z + 10 \\
z^4 & -z^3 & & & & \\
\hline
 & & z^2 & +9z & -10 & \\
 & & z^2 & -z & & \\
\hline
 & & & 10z & -10 & \\
 & & & 10z & -10 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

und somit $P(z) = \underbrace{(z^3 + z + 10)}_{=:P_1(z)} \cdot (z - 1)$.

Übung

Zeigen Sie, dass $z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$ *Nullstelle des verbleibenden Polynoms* $P_1(z) = z^3 + z + 10$ *ist. Dividieren Sie den entsprechenden Linearfaktor* $(z - z_2)$ *von* $P_1(z)$ *ab.*

Komplexe Nullstellen und Linearfaktoren

Lösung

Polynomdivision liefert:

$$
\begin{array}{llllll}
(z^3 & & & +z & +10) & : \; (z-(1+2\mathrm{i})) \; = z^2 +(1+2\mathrm{i})z +(-2+4\mathrm{i}) \\
z^3 & -(1+2\mathrm{i})z^2 & & & & \\
\hline
 & (1+2\mathrm{i})z^2 & & +z & +10 & \\
 & (1+2\mathrm{i})z^2 & +(3-4\mathrm{i})z & & & \\
\hline
 & & (-2+4\mathrm{i})z & & +10 & \\
 & & (-2+4\mathrm{i})z & & +10 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Insgesamt:

$$
\begin{aligned}
P_1(z) &= z^3+z+10 \\
&= (z^2+(1+2\mathrm{i})\cdot z+(-2+4\mathrm{i})) \cdot (z-(1+2\mathrm{i})).
\end{aligned}
$$

Komplexe Nullstellen und Linearfaktoren (Fortsetzung)

Lösung

Für $P(z)$ ergibt sich damit:

$$P(z) = \underbrace{(z^2 + (1+2\mathrm{i})z + (-2+4\mathrm{i}))}_{\text{Polynom 2.Grades}} \cdot \underbrace{(z-(1+2\mathrm{i})) \cdot (z-1)}_{\text{zu den Nullstellen } z_1 \text{ und } z_2 \text{ gehörige Linearfaktoren}}.$$

Hilfssatz

Folgender Hilfssatz erleichert das Auffinden von Nullstellen komplexer Polynome enorm: Sind die Koeffizienten des Polynoms sämtlich reell, so treten nämlich komplexe Lösungen stets paarweise konjugiert auf.

Gegeben sei das komplexe Polynom

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

vom Grade $n > 1$. Sind alle Koeffizienten a_n $(\neq 0)$, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 reell, so ist mit $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\ y_0$ auch $\overline{z_0} = x_0 - \mathrm{i}\ y_0$ eine Nullstelle.

Beispiel

Das (komplexe) Polynom

$$P(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 9z - 10$$

hat die Nullstelle $z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$.

Alle Koeffizienten von $P(z)$ *sind reell.*

Also ist auch $\overline{z_2} = 1 - 2\mathrm{i}$ *Nullstelle von* $P(z)$.

Übung

Gegeben ist das komplexe Polynom

$$P(z) = z^3 + 11z^2 + 49z + 75.$$

Die komplexe Zahl $z_1 = -4 - 3\mathrm{i}$ *ist Nullstelle von* $P(z)$*. Wie lautet (ohne Rechnung) eine weitere Nullstelle von* $P(z)$*?*

Lösung

Eine weitere Nullstelle von $P(z)$ *ist*

$$z_2 = \overline{z_1} = -4 + 3\mathrm{i}.$$

Dies gilt, weil $P(z)$ *ausschließlich reelle Koeffizienten besitzt.*

Fundamentalsatz der Algebra

Anders als im Reellen hat im Komplexen jedes Polynom n-ten Grades genau n (nicht unbedingt verschiedene) Nullstellen.

Jede algebraische Gleichung n-ten Grades ($n > 0$)

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

mit komplexen Koeffizienten a_n ($\neq 0$), $a_{n-1}, \ldots, a_1$, a_0 hat mindestens eine komplexe Lösung.

Fundamentalsatz der Algebra

Eine andere Formulierung des Fundamentalsatzes lautet (wenn wir nämlich sukzessive Linearfaktoren abdividieren):

Jedes Polynom n-ten Grades ($n > 0$)

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

mit komplexen Koeffizienten a_n ($\neq 0$), a_{n-1}, …, a_1, a_0 kann ganz in Linearfaktoren zerlegt werden:

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n \cdot (z - z_n) \cdot (z - z_{n-1}) \cdot \ldots \\ &\quad \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_1) \end{aligned}$$

Die komplexen Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sind die (nicht unbedingt verschiedenen) Nullstellen von $P(z)$.

Beispiel

Das Polynom $P(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 9z - 10$ *hat die Nullstellen* $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$, $z_3 = 1 - 2\mathrm{i}$ *und* $z_4 = -2$. *Damit lässt sich* $P(z)$ *wie folgt in Linearfaktoren zerlegen:*

$$P(z) = 1 \cdot (z-1) \cdot \underbrace{(z - (1+2\mathrm{i})) \cdot (z - (1-2\mathrm{i}))}_{\begin{aligned} &= ((z-1)-2\mathrm{i}) \cdot ((z-1)+2\mathrm{i}) \\ &= (z-1)^2 + 4 \\ &= z^2 - 2z + 5 \end{aligned}} \cdot (z+2)\,.$$

Im Reellen wäre $(x-1)^2 + 4 > 0$ *unzerlegbar, also*

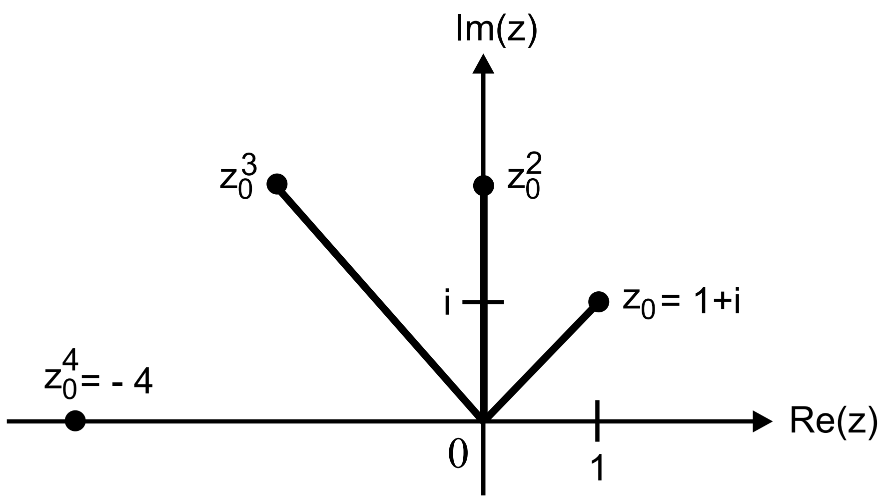
$$P(x) = (x-1) \cdot (x^2 - 2x + 5) \cdot (x+2)\,.$$

Potenzen einer komplexen Zahl

Beispiel

Die ersten vier Potenzen der komplexen Zahl $z_0 := 1 + \mathrm{i}$ *lauten:*

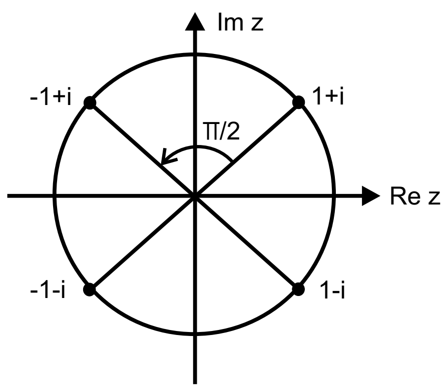
$$\begin{array}{lllllll} z_0^1 & = & 1+\mathrm{i} & = & \sqrt{2} & \cdot & e^{\mathrm{i}\pi/4}, \\ z_0^2 & = & (1+\mathrm{i})^2 & = & 2 & \cdot & e^{\mathrm{i}\pi/2} \quad (= 2\mathrm{i}), \\ z_0^3 & = & (1+\mathrm{i})^3 & = & \sqrt{2}^3 & \cdot & e^{\mathrm{i}\,3\pi/4} \quad (= -2+2\mathrm{i}), \\ z_0^4 & = & (1+\mathrm{i})^4 & = & 4 & \cdot & e^{\mathrm{i}\pi} \quad (= -4). \end{array}$$



Beispiel

Wegen $z_0^4 = -4$ können wir $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ offenbar als vierte Wurzel aus -4 interpretieren. Wenn wir nun umgekehrt von $-4 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ ausgehen, so müssen wir als vierte Wurzel davon diejenige Zahl nehmen, deren Betrag die vierte Wurzel des Betrages von -4 (also $\sqrt[4]{4}$) und deren Winkel der vierte Teil des Winkels von -4 (also $\frac{\pi}{4}$) ist. Dies ist aber gerade $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.

Die Frage ist nun noch, ob damit *alle* Wurzeln gefunden sind. Das Polynom $P(z) = z^4 + 4$ hat nämlich nicht nur die Nullstelle $z_0 = 1 + \mathrm{i}$, sondern auch die weiteren Nullstellen (insgesamt vier) $z_1 = -1 + \mathrm{i}$, $z_2 = -1 - \mathrm{i}$ und $z_3 = 1 - \mathrm{i}$.



Wurzeln von komplexen Zahlen

Die Gleichung $z^n = c$ mit der komplexen Zahl $c = |c| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ hat genau n verschiedene Lösungen

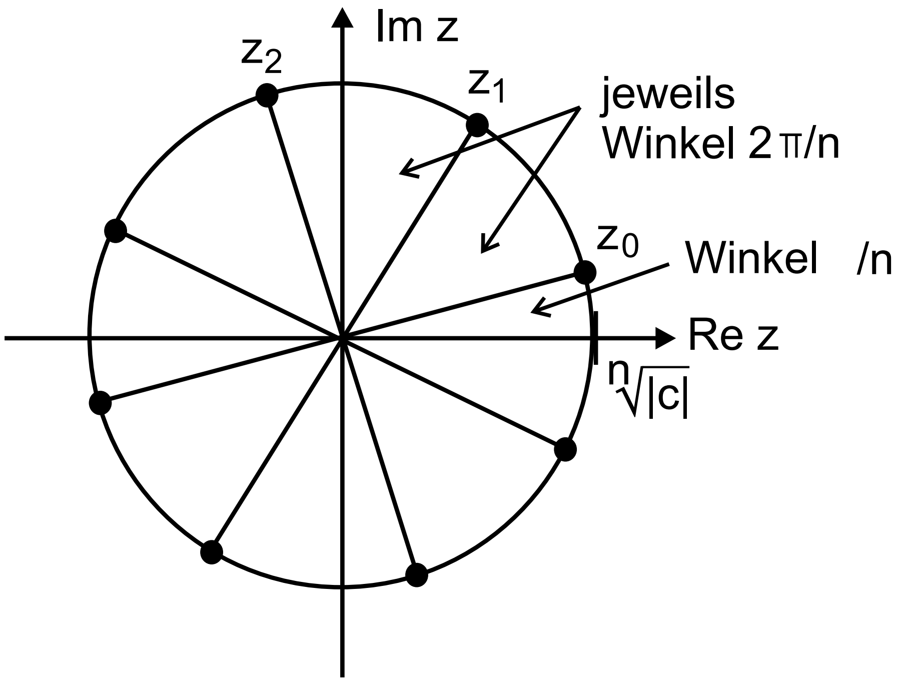
$$z_k = \sqrt[n]{|c|} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\phi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)},$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

die so genannten n-ten Wurzeln aus c.

Wurzeln von komplexen Zahlen
Veranschaulichung

Die n-ten Wurzeln aus $c = |c| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \neq 0$ liegen auf einem Kreis vom Radius $\sqrt[n]{|c|}$ um 0 und bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks, weil sich benachbarte Arcuswerte um jeweils $2\pi/n$ unterscheiden. Der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und der „ersten“ Wurzel z_0 beträgt gerade ϕ/n:



Beispiel

Die Gleichung $z^3 = \mathrm{i} = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ *hat die 3 Lösungen (Wurzeln)*

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[3]{1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+0\cdot\frac{2\pi}{3}\right)} = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i},\\
z_1 &= \sqrt[3]{1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+1\cdot\frac{2\pi}{3}\right)} = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i},\\
z_2 &= \sqrt[3]{1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)} = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -\mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

Die Wurzeln z_0, z_1 *und* z_2 *liegen auf einem Kreis vom Radius* 1 *um den Nullpunkt. Sie bilden ein gleichseitiges Dreieck.*

Beispiel

Die Gleichung $z^4 = -1 + \mathrm{i} = \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ *hat die 4 Lösungen (Wurzeln)*

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{16} + 0 \cdot \frac{2\pi}{4}\right)} = \sqrt[8]{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{16}} \approx 0.907 + 0.606\mathrm{i}, \\
z_1 &= \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{16} + 1 \cdot \frac{2\pi}{4}\right)} = \sqrt[8]{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{16}} \approx -0.606 + 0.907\mathrm{i}, \\
z_2 &= \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{16} + 2 \cdot \frac{2\pi}{4}\right)} = \sqrt[8]{2} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{13\pi}{16}} \approx -0.907 - 0.606\mathrm{i}, \\
z_3 &= \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{16} + 3 \cdot \frac{2\pi}{4}\right)} = \sqrt[8]{2} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{16}} \approx 0.606 - 0.907\mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

Die Wurzeln z_0, z_1, z_2 *und* z_3 *liegen auf einem Kreis vom Radius* $\sqrt[8]{2}$ *um den Nullpunkt. Sie bilden ein Quadrat.*

Übung

Bestimmen Sie alle (komplexen) vierten Wurzeln der Zahl 2.

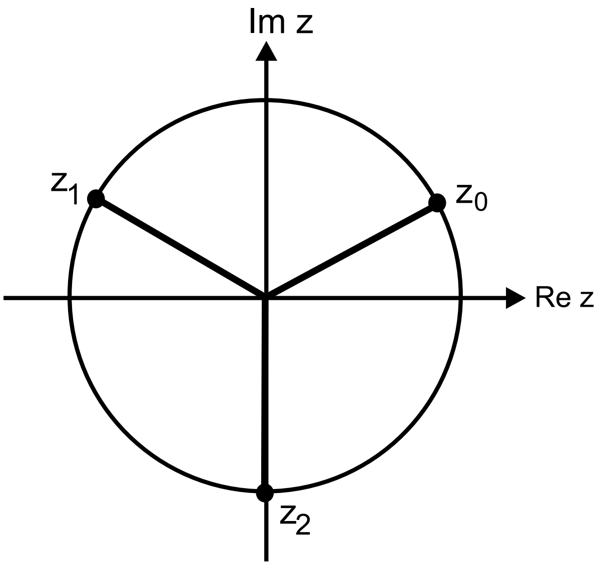
Lösung

Die Gleichung $z^4 = 2 = 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0}$ *hat die 4 Lösungen (Wurzeln)*

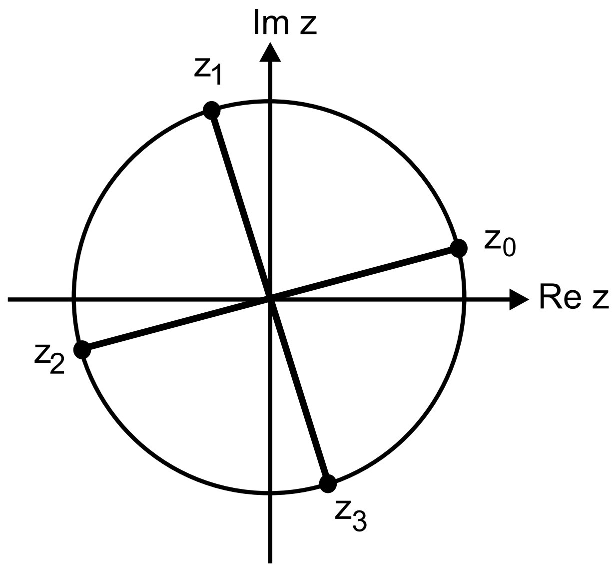
$$
\begin{array}{rclclcr}
z_0 & = & \sqrt[4]{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(0+0\cdot\frac{2\pi}{4})} & = & \sqrt[4]{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} & = & \sqrt[4]{2}, \\
z_1 & = & \sqrt[4]{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(0+1\cdot\frac{2\pi}{4})} & = & \sqrt[4]{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} & = & \sqrt[4]{2}\mathrm{i}, \\
z_2 & = & \sqrt[4]{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(0+2\cdot\frac{2\pi}{4})} & = & \sqrt[4]{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} & = & -\sqrt[4]{2}, \\
z_3 & = & \sqrt[4]{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(0+3\cdot\frac{2\pi}{4})} & = & \sqrt[4]{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} & = & -\sqrt[4]{2}\mathrm{i}.
\end{array}
$$

Die Wurzeln z_0, z_1, z_2 *und* z_3 *liegen auf einem Kreis vom Radius* $\sqrt[4]{2}$ *um den Nullpunkt. Sie bilden ein Quadrat.*

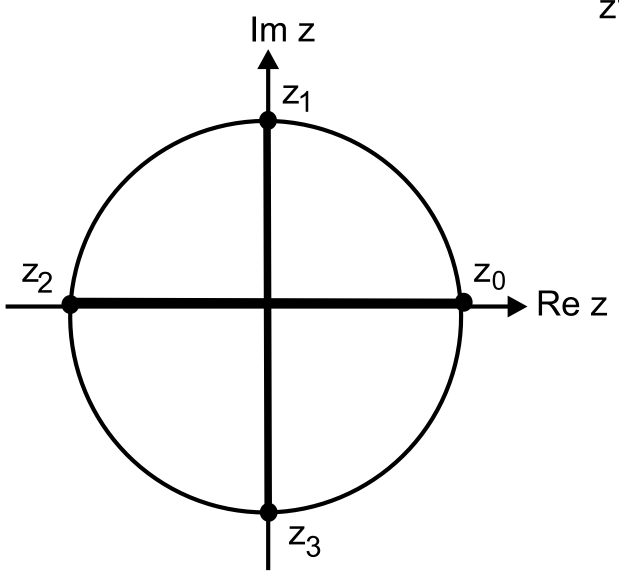
Wurzeln von komplexen Zahlen (Graphiken)



$z^3 = i$



$z^4 = -1+i$



$z^4 = 2$

Erzeugung von „Apfelmännchen“

Wir wählen zunächst einen Testpunkt $c := a + b \cdot \mathrm{i}$, eine komplexe Zahl also, und erzeugen nun sukzessive eine Folge von weiteren komplexen Zahlen. Startwert ist dabei der Koordinatenursprung selbst: $z_0 := 0 + 0 \cdot \mathrm{i}$. Die weiteren Elemente der Folge berechnen wir mittels folgender Vorschrift: $z_1 := z_0^2 + c$, $z_2 := z_1^2 + c$, ..., allgemein

$$z_n := z_{n-1}^2 + c.$$

(Dabei sind alle z_n komplexe Zahlen, und die verwandten Operationen sind die komplexe Addition und Multiplikation.)

Erzeugung von „Apfelmännchen“ (Fortsetzung)

Die Frage ist nun, ob einer der erzeugten Werte z_n außerhalb eines Kreises vom Radius 2 um den Koordinatenursprung liegt, d.h. ob gilt:

$$|z_n| \geq 2.$$

Ist dies der Fall, so wird unserem Testpunkt die Farbe „weiß“ zugeordnet und wir brechen die „Iteration“, die Berechnung von z_{n+1} etc., ab. Ansonsten führen wir den „Algorithmus“, die Rechenvorschrift, fort und berechnen das nächste Folgenglied z_{n+1}.

Erzeugung von „Apfelmännchen“ (Fortsetzung)

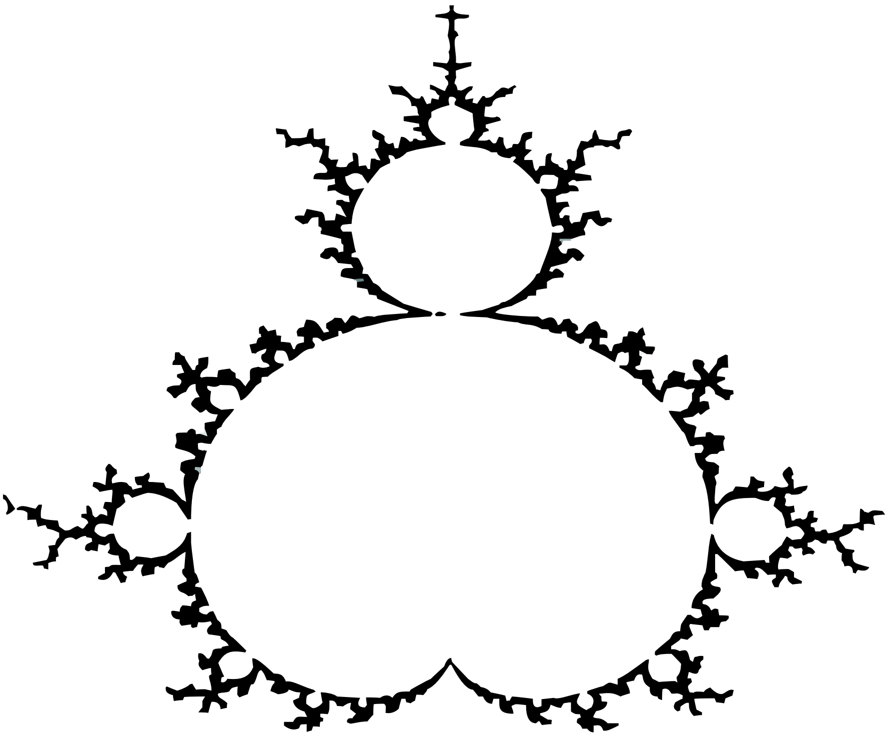
Wir können natürlich nicht alle (das sind nämlich unendlich viele!) Folgenglieder z_0, z_1, z_2, ... erzeugen und testen. Deshalb bricht man die Schleife z.B. bei $n = 100$ ab. Hat bis dahin kein Folgenglied den besagten Kreis verlassen, so erhält unser Testpunkt c die Farbe „schwarz“. Insgesamt haben wir also unserem Testpunkt c auf diese Weise eine der Farben „schwarz“ oder „weiß“ zugewiesen.

Erzeugung von „Apfelmännchen“ (Fortsetzung)

Nun ordnen wir einfach jedem (der endlich vielen) Pixel unseres Bildschirms eine komplexe Zahl c zu, wie ja schon Gauß die komplexen Zahlen durch die Gauß’sche Zahlenebene veranschaulicht hat. Wir führen dann mit jedem c den beschriebenen Algorithmus durch und färben jeden Bildschirm-Pixel entsprechend seines berechneten Farbwertes „schwarz“ oder „weiß“ ein. Ein so genanntes Apfelmännchen entsteht.

Eine spektakulärere Version erhält man z.B., indem man die Punkte c, deren Iterierte dem Kreis entkommen, wirklich farbig einfärbt — und zwar entsprechend der Anzahl der Iterationsschritte, die bis zur Flucht aus dem Kreis durchgeführt werden müssen.

Erzeugung von „Apfelmännchen“ (Graphik)

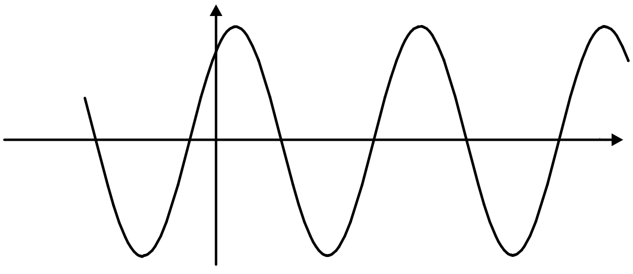


Elektrische Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

Dabei bezeichnet U_0 die Amplitude, ω die Frequenz und ϕ die Phasenverschiebung.

Grob gesprochen gibt U_0 an, um wieviel höher oder niedriger als 1 die Cosinusfunktion schwingt; ω gibt an, um wieviel schneller oder langsamer $U(t)$ im Vergleich zur üblichen Cosinusfunktion schwingt; und schließlich besagt ϕ, um wieviel eher oder später als zur Zeit $t = 0$ der maximale Ausschlag erreicht wird.

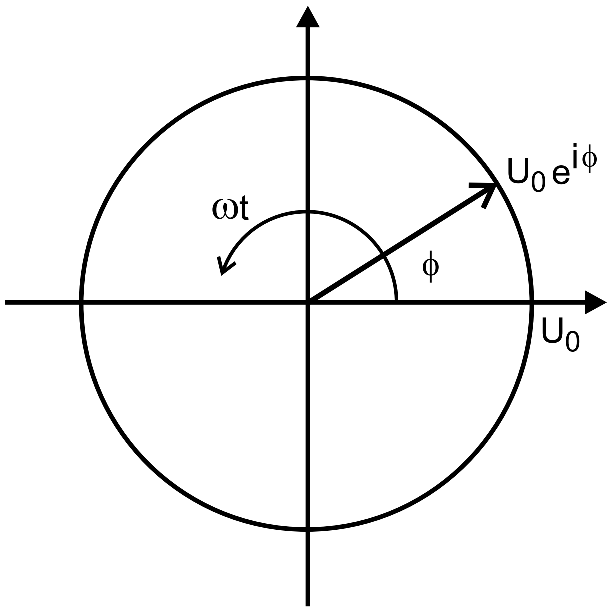


Elektrische Wechselspannung komplex aufgefasst

Eine derartige Wechselspannung $U(t)$, oder viel allgemeiner jede so genannte *harmonische Schwingung*, kann nun aber komplex als $\underline{U}(t)$ aufgefasst werden:

$$\begin{aligned}\underline{U}(t) &= U_0 \cdot (\cos(\omega t + \phi) + \mathrm{i}\sin(\omega t + \phi)) \\ &= U_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \phi)}.\end{aligned}$$

(In der Elektrotechnik ist es üblich, komplexe Größen durch Unterstreichung zu kennzeichnen.)



Das Ohmsche Gesetz

Das Ohmsche Gesetz lautet nun bekanntlich

$$U = R \cdot I,$$

es beschreibt den einfachen Zusammenhang zwischen Spannung U, Ohmschem Widerstand R und Stromstärke I und gilt sowohl für Gleich- als auch für Wechselstrom.

Einen ähnlichen Zusammenhang kann man nun auch bei anderen Widerständen wie Kondensator und Spule aufstellen, man muss aber die komplexe Darstellung verwenden:

$$\underline{U}(t) = \underline{Z} \cdot \underline{I}(t).$$

(Wieder stehen $\underline{U}$ für die Spannung, $\underline{I}$ für die Stromstärke (beide komplex aufgefasst), und $\underline{Z}$ bezeichnet den i.Allg. komplexen Widerstand.)

Komplexe Widerstände

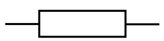
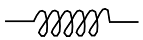
Der Widerstand eines Kondensators (der Kapazität C) etwa beträgt bei Wechselstrom der Frequenz ω

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C} = -\mathrm{i} \cdot \frac{1}{\omega C};$$

und die Multiplikation von $\underline{I}_C$ mit $\underline{Z}_C$ zu $\underline{U}_C$ spiegelt wieder, dass die Spannung U_C dem Strom I_C um 90° „hinterherhinkt“. Im Komplexen wurde das durch die Multiplikation mit $-\mathrm{i}$, durch Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn also, ausgedrückt.

Ähnliches gilt auch für so genannte Induktivitäten (Spulen also), und entsprechende Rechnungen können für kompliziertere Schaltbilder mit Reihen- oder Parallelschaltung mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln und der beschriebenen komplexen Rechnung ausgeführt werden.

Schaltzeichen, Schaltelemente und komplexen Widerstände für Ohm'sche Widerstände, Kondensatoren und Spulen

Schaltzeichen	Schaltelement		Widerstand
	Widerstand R	(Ohm'scher Widerstand)	R
	Kapazität C	(Kondensator)	$\frac{1}{\mathrm{i}\omega C}$
	Induktivität L	(Spule)	$\mathrm{i}\omega L$